导数.

1、判断正误：$x=0$处导数大于0，是否∃$\delta>0$，函数于$(-\delta,\delta)$单增？

Sol：

错：$y=x^2\cdot D(x)+x$　　$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{有理}\\ 1 & x\text{无理}\end{cases}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot D(\Delta x)+\Delta x}{\Delta x}=1$$

取$0<a<b$，a无理 b有理，$a^2D(a)+a>b^2D(b)+b=b$

即 $a^2+a>b$ 即可. 即：$\frac{\sqrt{1+4b}-1}{2}<a<b$

($xD(x)$于$x=0$连续，$x^2D(x)$于$x=0$可导)

2、(Darboux定理) $f(x)$于$[a,b]$可导，$f_+'(a)\cdot f_-'(b)<0$，则∃$\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$.

Sol：

不妨设$f_+'(a)<0$，$f_-'(b)>0$，则∃$\Delta x_1>0$，$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$

即 $f(a+\Delta x_1)<f(a)$，同理，∃$\Delta x_2>0$，$f(b-\Delta x_2)<f(b)$

$f(a)$与$f(b)$不是$f(x)$于$[a,b]$最小值，由最值定理，∃$\xi>0$ s.t. $f(\xi)=\min f(x)$

由Fermat定理即得.

3、导函数介值性：$f(x)$于$[a,b]$可导，$f_+'(a)=p$，$f_-'(b)=q$，则$f'(x)$可取到(p,q)所有数.

Sol：

不妨设$p<q$，若$r\in(p,q)$，即证∃ξ s.t. $f'(\xi)=r$.

$f'(\xi)-r=0$　思考构造 $g(x)=f(x)-rx$　$g_+'(a)=f_+'(a)-r=p-r<0$

$g_-'(b)=q-r>0$，由上一问即得.

推论：若导函数无零点，则f必单调！

4、f 于 $[1,1]$ 有连续的三阶导，$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证：$\exists x_0\in(-1,1)$ s.t. $f'''(x_0)=3$.

Sol:

由 Rolle Thm 反向思考：$f'''(x_0)-3=g'''(x_0)=0$

$g''(x)=f''(x)-3x+C_1$, $g'(x)=f'(x)-\frac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$　　$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x$

$g'(0)=C_2$，考虑 $(-1,0)$. $(0,1)$ 对 g 各一次 Rolle.

则必有：$g(-1)=g(0)=g(1)$，

$g(0)=f(0)=g(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{C_1}{2}+C_2=g(-1)=\frac{1}{2}+\frac{C_1}{2}-C_2$.

则 $\begin{cases}\frac{C_1}{2}+C_2=f(0)-\frac{1}{2}\\ \frac{C_1}{2}-C_2=f(0)-\frac{1}{2}\end{cases}$ 得 $C_2=0$，$C_1=f(0)-1$

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3-(f(0)-1)\cdot x$

Rolle：$\exists \xi_1\in(-1,0)$ s.t. $g'(\xi_1)=0$

$\exists \xi_2\in(0,1)$ s.t. $g'(\xi_2)=0$

Rolle　$\exists \eta_1\in(\xi_1,0)$ s.t. $g''(\eta_1)=0$

$\exists \eta_2\in(0,\xi_2)$ s.t. $g''(\eta_2)=0$

Rolle　$\exists x_0\in(\eta_1,\eta_2)$ s.t. $g'''(x_0)=0$.

5、f 于 $[0,1]$ 内三阶可导，证：$\exists \xi\in(0,1)$ s.t.

$f(1)=f(0)+\frac{1}{2}[f'(0)+f'(1)]-\frac{1}{12}f'''(\xi)$.

Sol：$f'''(\xi)=12[f(0)-f(1)]+6[f'(0)+f'(1)]$

考虑多项式 $p(x)$，若 $p'''(x)=12[f(0)-f(1)]+6[f'(0)+f'(1)]$

则对 $g''(x)=f''(x)-p''(x)$ Rolle 即可.

若可对 g'' Rolle，则必有 $g''(x_1)=g''(x_2)$，

它又来源于 $g'(x)$ 的 Rolle.

因此可待定：$p(0)=f(0)$，$p(1)=f(1)$. $p'(0)=f'(0)$，$p'(1)=f'(1)$.

这样才能对 g'' Rolle.

$p(x)=\{2[f(0)-f(1)]+[f'(0)+f'(1)]\}x^3+bx^2+cx+d$

$p(0) = d = f(0) \quad p'(0) = c = f'(0)$

$p(1) = 2[f(0) - f(1)] + [f'(0) + f'(1)] + b + f'(0) + f(0) = f(1)$.

故 $b = -3[f(0) - f(1)] - 2f'(0) - f'(1)$

验证: $p'(1) = 6[f(0) - f(1)] + 3[f'(0) + f'(1)] - 6[f(0) - f(1)] - 4f'(0) - 2f'(1) + f'(0)$

$= f'(1)$. 正确!

$g(0) = 0$, $g(1) = 0$ $\Rightarrow \exists\, \eta_1 \in (0,1)$ s.t. $g'(\eta_1) = 0$

$g'(0) = g'(\eta_1) = g'(1) = 0$ $\exists\, \zeta_1 \in (0, \eta_1)$ s.t. $g''(\zeta_1) = 0$

$\exists\, \zeta_2 \in (\eta_1, 1)$ s.t. $g''(\zeta_2) = 0$

$\exists\, \xi \in (\zeta_1, \zeta_2)$, s.t. $g'''(\xi) = 0$. 证毕.

实际上 $p(x)$ 可如此确定:

$$p(x) - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$
$$f(0) - a\cdot 0 - b\cdot 0 - c\cdot 0 - d = 0$$
$$f(1) - a\cdot 1^3 - b\cdot 1^2 - c\cdot 1 - d = 0$$
$$f'(0) - a\cdot 3\cdot 0^2 - b\, 2\cdot 0 - c\cdot - d\cdot 0 = 0$$
$$f'(1) - a\cdot 6\cdot 1^2 - b\cdot 2\cdot 1 - c - d\cdot 0 = 0$$

将其视为线性方程组, 有非零解 $\begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix}$, 故系数矩阵行列式为0

(第一行中系数为 $p(x), x^3, x^2, x, 1$)

$$\begin{vmatrix} p(x) & x^3 & x^2 & x & 1 \\ f(0) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f'(0) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f'(1) & 6 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

双中值：

5、f于$[0,2021]$连续，于$(0,2021)$可导，且$f'(x)\neq 0$.

$f(0)=0$, $f(2021)=2$，证：$\exists\ \xi\neq\eta$, $\xi,\eta\in(0,2021)$ s.t.

$f'(\eta)[f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)]=f'(\xi)[2021f'(\eta)-1]$

$f(\xi)+\left[\xi+\frac{1}{f'(\eta)}-2021\right]\cdot f'(\xi)=0$. 将$f'(\eta)$视为待定.

考虑 $g(x)=\left[x+\frac{1}{f'(\eta)}-2021\right]f(x)$

$g(0)=0$ $\quad g(2021)=-\frac{2}{f'(\eta)}$

是否有 $g(x_1)$ s.t. $g(x_1)=0$?

则 $x_0+\frac{1}{f'(\eta)}-2021=0$ $\quad f'(\eta)=\frac{1}{2021-x_0}$

想象分子$1=f(2021)-f(x_0)$

则取$f(x_0)=1$即可.

6、$f(x)$于(a,b)可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. 证：$\exists\ \xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$

法(1)、在$[a+\delta,b-\delta]$内用Fermat Thm.

法2 $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x=a\\ \operatorname{arctg} f(x) & a<x<b\\ \frac{\pi}{2} & x=b\end{cases}$.

由Rolle $\exists\ \xi\in(a,b)$ s.t. $g'(\xi)=\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}=0$

i.e. $f'(\xi)=0$