数学外卖—导数应用与微分中值定理

许子寒、何山

2024 年 10 月 26 日

A

题目 1 设函数 $f(x)$ 在 0 的某领域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则在 $x=0$ 处（ ）

A. $f''(0)=2$;

B. $f(x)$ 取得极大值;

C. $f(x)$ 取得极小值;

D. $f(x)$ 不取得极值.

题目 2 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域内具有三阶连续导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处?

A. 有极大值;

B. 有极小值;

C. 有拐点;

D. 无极值，也无拐点.

* 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域内有四阶连续导数，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，而 $f''''(x_0)\neq 0$. 问 x_0 是否为极值点? $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点?

题目 3 判断命题：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有极值点 x_0，则该极值点一定是函数 $f(x)$ 单调性的分界点?

题目 4 已知函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

题目 5 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(0)=0$，$g'(0)=0$，$g''(0)=10$. 求 $f'(0)$.

题目 6 证明：$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}$，$(x\geq 1)$.

题目 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$a>0$. 证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

题目 8 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\dfrac{1}{x}}=e^3$. 求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$.

题目 9 求函数 $f(x)=\tan x$ 在 $x=0$ 处展开到 $n=5$ 次的 Taylor 公式.

求下列极限：(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$. (2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$

题目 10 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1})$，其中 $a \neq 0$ 为常数.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,|\sin(\pi n!\mathrm{e})|$.

B

题目 11 已知函数 f 在 $[-1,1]$ 上有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：$\exists x_0 \in (-1,1)$，使得 $f'''(x_0)=3$.

题目 12 已知函数 f 在 $[0,1]$ 内三阶可导. 证明：$\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2}[f'(0)+f'(1)]-\dfrac{1}{12}f'''(\xi)$.

题目 13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，其中 $a>0$，且 $f(a)=0$. 证明 $\exists \epsilon \in (a,b)$，使得 $f(\epsilon)=\dfrac{b-\epsilon}{a}f'(\epsilon)$.

题目 14 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明 $\exists \epsilon \in (a,b)$，$f'(\epsilon)+f(\epsilon)g'(\epsilon)=0$.

题目 15 设在 $[0,1]$ 上函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f(x)>0$，$f(0)=2$，$f(1)=1$，$f'(0)=-2$. 证明 $\exists \epsilon \in (0,1)$，使得 $f(\epsilon)f'(\epsilon)+f''(\epsilon)=0$.

题目 16 已知函数 f 在 $[0,2021]$ 上连续，在 $(0,2021)$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$，$f(0)=0$，$f(2021)=2$. 证明 $\exists \xi,\eta \in (0,2021)$ 且 $\xi \neq \eta$，使得 $f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[2021f'(\eta)-1]$.

题目 17 （达布定理）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

题目 18 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且存在一点 $c \in [a,b]$ 使得 $f'(c)=0$. 证明存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f'(\xi)=(f(\xi)-f(a))(b-a)$.

感谢参加我们的讲座！麻烦填写一下反馈问卷，帮助我们之后更好地开展活动，谢谢！

外卖讲座反馈问卷

外卖官网：tongjimath.github.io
Bilibili：一题 _ 撬动数学