构造方法解中值定理证明流程：

$$\begin{tikzcd} f\text{的信息} \arrow[r, "\text{构造}"] \arrow[d] & F\text{的信息} \arrow[d, "\text{中值定理}"] \\ \text{含}f'(\xi)\text{的式子} & F'(\xi)\text{的式子} \arrow[l, "\text{变形}"'] \end{tikzcd}$$

1. 证明高阶导为常值——插值多项式构造。
2. 乘积/复合函数型辅助函数(微分方程法)
3. 达布定理及例题

构造思路恰好相反，根据 $f'(\xi)$ 的式子，猜测 F 具有怎样的形式。

eg1：

思路：·要证 $f'''(x_0)=3$，即证 $f'''(x_0)-3=0$.

设辅助函数为 g，则 $g'''(x_0)=f'''(x_0)-3=0$.

$\Rightarrow g''(x)=f''(x)-3x+C_1 \Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$.

$\Rightarrow g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x$ （C_3可省略，因为常数项不影响求导结果）.

·确定常数 C_1, C_2：

要证 $g'''(x_0)=0 \xLeftarrow{\text{Rolle}}$ 可证 $\exists \eta_1,\eta_2$, $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0 \xLeftarrow{\text{可证}} \exists \xi_1\in(-1,0)$, $\exists \xi_2\in(0,1)$, s.t.

$g'(\xi_1)=g'(0)=g'(\xi_2)=0 \xLeftarrow{\text{Rolle}} g(-1)=g(0)=g(1)$，让 C_1, C_2 取合适的值使前式成立

考虑要利用 $f'(0)$ 的条件

·计算：$g(-1)=g(0)=g(1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{C_1}{2}-C_2=f(0) \\ -\frac{1}{2}+\frac{C_1}{2}+C_2+1=f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2f(0) \\ C_2=0 \end{cases}$

从而得到 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+f(0)x^2$.

证明：由思路中 g 的构造，$g(-1)=g(0)=g(1)$.

$\Rightarrow \exists \xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$, s.t. $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 又 $g'(0)=0$.

$\Rightarrow \exists \eta_1\in(\xi_1,0)$ $\exists \eta_2\in(0,\xi_2)$ s.t. $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$.

$\Rightarrow \exists x_0\in(\eta_1,\eta_2)$, s.t. $g'''(x_0)=0$. i.e. $f'''(x_0)-3=0$.

eg12:

思路: 类似上题, 证明三阶导为常数, 则考虑辅助函数 $g(x)=f(x)-p(x)$, $p(x)$ 为三次多项式.

题目中要证 $f'''(\xi)$ 等于关于 $f(0), f(1), f'(0), f'(1)$ 的常数.

考虑到要使用三次 Rolle 定理, 则设法使 $g(0)=g(1)=g'(0)=g'(1)=0$.

即找三次多项式 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, s.t. $f(0)=p(0)$, $f(1)=p(1)$, $f'(0)=p'(0)$, $f'(1)=p'(1)$.

(多项式插值)

- 计算: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $p'(x)=3ax^2+2bx+c$.

$$\begin{cases} d=f(0) \\ a+b+c+d=f(1) \\ c=f'(0) \\ 3a+2b+c=f'(1) \end{cases} \quad \text{解得:} \quad \begin{cases} a=2[f(0)-f(1)]+[f'(0)+f'(1)] \\ b=-3[f(0)-f(1)]-2f'(0)-f'(1) \\ c=f'(0) \\ d=f(0) \end{cases}$$

一个计算技巧:

$$p(x)-ax^3-bx^2-cx-d=0$$

$$\begin{cases} f(0)-a\cdot 0-b\cdot 0-c\cdot 0-d=0 \\ f(1)-a\cdot 1^3-b\cdot 1^2-c\cdot 1-d=0 \\ f'(0)-a\cdot 3\cdot 0-b\cdot 2\cdot 0-c\cdot \cancel{1}=0 \\ f'(1)-a\cdot 3\cdot 1^2-b\cdot 2\cdot 1-c\cdot 1=0 \end{cases}$$

方程有非零解 $[1,-a,-b,-c,-d]^T$, 则

$$\begin{vmatrix} p(x) & x^3 & x^2 & x & 1 \\ f(0) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f'(0) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f'(1) & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

, 按第一行展开即可.

证明: 令 $g(x)=f(x)-p(x)$, $p(x)$ 如上所述.

由构造知, $g(0)=g(1)=0 \Rightarrow \exists \xi_1\in(0,1)$, $g'(\xi_1)=0$.

又 $g'(0)=g'(1)=g'(\xi_1)=0 \Rightarrow \exists \eta_1\in(0,\xi_1)$, $\exists \eta_2\in(0,\xi_2)$, $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$.

$\Rightarrow \exists \xi\in(\eta_1,\eta_2)$, $g'''(\xi)=f'''(\xi)-6a=0$

即 $f'''(\xi)=6a=12[f(0)-f(1)]+6[f'(0)+f'(1)]$, 即题目所证.

eg13:

思路: 即证 $f(\xi)+\frac{\xi-b}{a}f'(\xi)=0$,

注意到以下事实: $[(kx+b)^n f(x)]'=kn(kx+b)^{n-1}f(x)+(kx+b)^n f'(x)$

$=n(kx+b)^{n-1}\left[f(x)+\frac{kx+b}{kn}f'(x)\right]$

出现了题目中需证明的结构, 故考虑令 $g(x)=(c_1x+c_2)^m f(x)$.

- 计算: $g'(x)=c_1m(c_1x+c_2)^{m-1}\underbrace{\left[f(x)+\frac{c_1x+c_2}{c_1m}f'(x)\right]}_{\parallel}$,

$f(x)+\frac{\xi-b}{a}f'(x)$. 如此, 由 $g'(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)+\frac{\xi-b}{a}f'$

可解得 $\begin{cases} m=a \\ c_1=1 \\ c_2=-b \end{cases}$ (取一个解即可), 则 $g(x)=(x-b)^a f(x)$.

证明：由思路可得 $g(x)=(x-b)^a f(x)$.

显然 $g(a)=g(b)=0$，则 $\exists \xi\in(a,b)$ s.t $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f(\xi)$.

eg 14：

思路：「本题与上题有类似的地方，都是证明关于 f', f 的一次齐次式等于0.

因此仍然利用乘积的方法构造辅助函数.

注意到：$[f(x)e^{g(x)}]'=[f'(x)+f(x)g'(x)]e^{g(x)}$，出现了要证的结构」

证明：令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，由 $f(a)=f(b)=0 \Rightarrow F(a)=F(b)=0$.

$\xRightarrow{Rolle} \exists\xi\in(a,b)$. $F'(\xi)=[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]e^{g'(\xi)}=0 \Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

eg 15：

思路：「要证 $\exists\xi\in(0,1)$，$\underbrace{f(\xi)f'(\xi)}+\underbrace{f''(\xi)}=0$

注意 $(f^2)'=2ff'$　　$(f')'=f''$.

由此构造 $F(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)$，对F使用Rolle即可得到所证

由条件 $F(0)=\frac{1}{2}\times2^2-2=0$，则还需要 $\exists\eta\in(0,1)$. $F'(\eta)=\frac{1}{2}f^2(\eta)+f'(\eta)=0$.

亦即 $\frac{1}{2}+\frac{f'(\eta)}{f^2(\eta)}=0$ 联想到 $(\frac{1}{f})'=-\frac{f'}{f^2}$，

故构造 $G(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{f(x)}$，此时 $G(0)=G(1)=-\frac{1}{2}$.」

证明：$F(x)$. $G(x)$ 如上所述.

由 $G(0)=G(1)=-\frac{1}{2}$ $\xRightarrow{Rolle} \exists\eta\in(0,1)$，$G'(\eta)=\frac{1}{2}+\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}=0$.

又 $F(0)=0$. $F(\eta)=f(\eta)^2[\frac{1}{2}+\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}]=0$. $\xRightarrow{Rolle} \exists\xi\in(0,1)$, $F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$

eg 16：

思路：「双中值问题，先把其中之一看作常数处理，这里先将 η 当作常数.

整理得：$f(\xi)+[\xi-2021+\frac{1}{f'(\eta)}]f'(\xi)=0$.

又出现了eg14类似的结构，令 $F(x)=[x-2021+\frac{1}{f'(\eta)}]f(x)$，证明 $F'(\xi)=0$ 即可

代入条件 $\begin{cases} F(0)=[0-2021-\frac{1}{f'(\eta)}]f(0)=0. \\ F(2021)=\frac{2}{f'(\eta)} \end{cases}$

想办法找F中两个相同的函数值，再用Rolle，但这里设法使 $F(0)=F(2021)$ 不可能.

假设 $F(x_0)=F(0)=0$. 即 $[x_0-2021+\frac{1}{f'(\eta)}]f(x_0)=0$. 即 $f'(\eta)=\frac{1}{2021-x_0}$

考虑到还有 $f(2021)=2$ 未使用，联想Lagrange：$f'(\eta)=\frac{f(2021)-f(x_0)}{2021-x_0}=\frac{2-f(x_0)}{2021-x_0}$

故先找到 $f(x_0)=1$，由介值定理，这是显然的.

证明：由介值定理，$\exists x_0 \in (0,2021)$, s.t. $f(x_0)=1$.

由Lagrange，$\exists \eta \in (x_0, 2021)$, s.t. $f'(\eta) = \dfrac{f(2021)-f(x_0)}{2021-x_0} = \dfrac{1}{2021-x_0}$

F 如同思路中构造，则 $F(0)=0$，$F(x_0) = \left[x_0 - 2021 + \dfrac{1}{f'(\eta)}\right] f(x_0) = 0$.

由Rolle，$\exists \xi \in (0, x_0)$. s.t. $F'(\xi) = f(\xi) + \left[\xi - 2021 + \dfrac{1}{f'(\eta)}\right] f'(\xi) = 0$.

即题目所证.

小结：以上辅助函数的构造都离不开对式子的观察，

即什么样的式子求导可以得到所需要的式子？

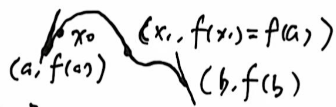
最后一章学完后有一个较通用的方法 —— 微分方程法.

这里仅给出一个较重要的情形：$f'(\xi) + g(\xi) f(\xi) = 0$，令 $F(x) = f(x) e^{\int g(x)dx}$

则可得 $F'(x) = [f'(x) + g(x) f(x)] e^{\int g(x)dx}$

eg17:

思路：「不妨 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，示意图：



先利用介值，找出符合Rolle条件的两点.

再用Rolle证明导数为0」

证明：不妨 $f'_+(a)>0$. $f'_-(b)<0$，由对称性，不妨 $f(a) \geq f(b)$.

$f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$. $\forall x \in (a, a+\delta)$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

不妨取一点 $x_0 \in (a, a+\delta)$. 则 $f(x_0) > f(a) \geq f(b)$.

f在 $[x_0, b]$ 上连续 $\Rightarrow \exists x_1 \in [x_0, b]$. s.t. $f(x_1) = f(a)$.

$\xrightarrow{\text{Rolle}} \exists \xi \in (a, x_1) \subseteq (a,b)$. s.t. $f'(\xi) = 0$.

练习：由~~Rolle~~ Darboux 证明导函数具有介值性.

eg18:

思路：「给出的已知条件是关于导数的信息，由此不采用Rolle. 讨论导函数性质考虑Darboux.

先做一个小处理：令 $\tilde{f}(x) = f(x) - f(a)$，则有 $\tilde{f}(a)=0$，$\tilde{f}'(c)=0$，需证 $\tilde{f}'(\xi) = \tilde{f}(\xi)(b-a)$.

再构造 $F(x) = e^{-(b-a)x} \cdot \tilde{f}(x)$，需证 $\exists \xi \in (a,b)$. s.t. $F'(\xi) = 0$.

若需利用Darboux，考虑反证法.」

证明：令 $F(x) = e^{-(b-a)x} \cdot [f(x) - f(a)]$，反证. 假设 $\forall \xi \in [a,b]$. $f'(\xi) \neq (f(\xi) - f(a))(b-a)$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)$. $F'(x) \neq 0$. 由Darboux定理. 不妨假设 $\forall x \in [a,b]$. $F'(x) > 0$. (如<0，可一样代替)

则F单增. 则 $F(c) = e^{-(b-a)c}[f(c) - f(a)] > F(a) = 0 \Rightarrow f(c) > f(a)$.

$F'(x) = e^{-(b-a)x}[f'(x) - (b-a)(f(x) - f(a))]$

$\Rightarrow F'(c) = e^{-(b-a)c}[f'(c) - (b-a)(f(c) - f(a))] = -e^{-(b-a)c}(b-a)[f(c) - f(a)] > 0 \Rightarrow f(c) < f(a)$ 矛盾!