微分中值定理与导数的应用 讲义

复旦大学

① 回顾：闭区间连续函数的性质 （R的连续性在连续函数上的体现.）

1° 有界定理　2° 最值定理　3° 零点存在定理 $\longrightarrow$ 4° 介值定理　*5° 一致连续性.

② 微分中值定理： $f(x)\in C[a,b]$，$D(a,b)$.

Fermat 引理

Rolle 定理 $\longrightarrow$ Lagrange 中值定理 $\longrightarrow$ Cauchy 中值定理.

$f(a)=f(b)$　　$g'(x)\neq 0$ $(\forall x\in(a,b))$.

$\longrightarrow$ $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t.

$f'(\xi)=0$　　$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　　$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

① ②

*定理中一个条件不满足，结论就可能不成立.

③ 导数与函数性质 I：

1° $f'(x)\equiv 0 \Longleftrightarrow f(x)=C$　*积分学的基础.

2° 一阶导数 ~ 单调性： $f(x)$单增 $\Longleftrightarrow f'(x)\geq 0$

$f(x)$严格单增 $\overset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} f'(x)>0$　可导　ex: $f(x)=x^3$

3° 二阶导数 ~ 凹凸性： $f(x)$凸函数 $\Longleftrightarrow f''(x)\geq 0$

$f(x)$严格凸 $\overset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} f''(x)>0$　二阶可导　ex: $f(x)=x^4$

*凸函数定义： $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$.

④ L'Hospital 法则与 Taylor 公式

1. L'Hospital 法则：

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty)$ “不定式”

2° $f(x)$，$g(x)$在x_0去心邻域可导，且$g'(x)\neq 0$

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\infty)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

! 经典错误

① 用 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在 推 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 ☆

② 用 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 推 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

*用 L'Hospital 法则求极限（略）　$(0\cdot\infty,\ \infty\pm\infty,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^0 \longrightarrow \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty})$

CS CamScanner

2. Taylor公式：

$f(x), f'(x), \cdots f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0邻域内存在且连续.

• Peano余项. $f(x)$在x_0处有n阶导数，对于x_0邻域中一点x：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boxed{o((x-x_0)^n)}$$

对比

• Lagrange余项. $f(x)$在$[a,b]$有n阶连续导数，且在(a,b)有n+1阶导数，对$x_0\in[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$：

$$f(x)= \cdots\cdots + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}(x-x_0)^{n+1}$$

ξ在x, x_0间.

* 中值定理的推广.

* $x_0=0$. Maclaurin公式.

3. 应用

1° 函数的Taylor公式（略） ex: $\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$处

$$\sin(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}\sin(x-\frac{\pi}{3}) + \sin\frac{\pi}{3}\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

*Taylor级数会有更好的计算方法.

2° 近似计算（略）.

3° 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)$: $Ax^n+o(x^n)$
$g(x)$: $Bx^n+o(x^n)$

$$\to \frac{A+\frac{o(x^n)}{x^n}}{B+\frac{o(x^n)}{x^n}} \to \frac{A}{B}$$

⑤ 导数与函数的性质II

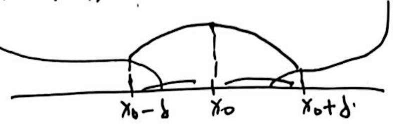
极值点. 定义（充要条件）：x_0是$f(x)$极大（小）值点 $\Longleftrightarrow$ $\exists U(x_0,\delta)$ $\forall x\in U(x_0,\delta)$ $f(x)\le f(x_0)$ 极大；$f(x)\ge f(x_0)$ 小

题目3.

必要条件（Fermat引理）：可导，$f'(x_0)=0$ "驻点"

充分条件：I $f(x)$在x_0连续，在x_0去心邻域可导.

$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)\ge0$　$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x)\le0$　极大　•proof: 单调性.



---- 极小

II 在x_0二阶可导且$f'(x_0)=0$

$f''(x_0)<0$ ∩ 极大.　$f''(x_0)>0$ ∪ 极小.　$f''(x_0)=0$ 不定.

题目2.

•proof: $f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$. $\to$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}$

保号性.

*用必要条件求可能的极值点
- 驻点
- $f'(x)$不存在.

再用充分条件 or 定义来判定.

拐点. 定义：凹凸性的分界点. 必要条件：$(x_0,f(x_0))$是拐点、在x_0邻域二阶可导 $\Longrightarrow f''(x_0)=0$

充分条件：$(x_0-\delta,x_0)$与$(x_0,x_0+\delta)$二阶可导（x_0连续）且$f''(x)$在两侧异号 $\Longrightarrow (x_0,f(x_0))$是拐点.　* ......

CamScanner