数学外卖-Jordan 标准形

戴云舒　谢明灿

2025 年 4 月 23 日

1　基础知识

定义 1.1 (根子空间与根向量). 线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于 $p_i(\lambda)$ 的根子空间定义为

$$W_i := \bigcup_{m=1}^{\infty} W_i^{(m)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(p_i^m(\mathscr{A})) = \{\alpha \in V \mid p_i^m(\mathscr{A})(\alpha) = 0, \exists m \in \mathbb{N}\} \subset V.$$

称向量 $0 \neq \alpha \in W_i$ 为属于 $p_i(\lambda)$ 的根向量. 如果 $\alpha \in W_i^{(m)}$, 但是 $\alpha \notin W_i^{(m-1)}$, 则称 α 是 m 次根向量. 这里约定 $W_i^{(0)} = \{0\}$.

定理 1.1 (根子空间分解定理). 设线性空间 V 的维数 $\dim V = n$, $\mathscr{A} : V \longrightarrow V$ 是线性变换, 其特征多项式和最小多项式分别为 $\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda) = p_1^{m_1}(\lambda)p_2^{m_2}(\lambda)\cdots p_s^{m_s}(\lambda)$, $d_{\mathscr{A}}(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda)p_2^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$, 其中 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_s(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 是两两互不相同的首一不可约多项式，$1 \leqslant k_i \leqslant m_i$。则 V 有根子空间分解

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s = \ker(p_1^{k_1}(\mathscr{A})) \oplus \ker(p_2^{k_2}(\mathscr{A})) \oplus \cdots \oplus \ker(p_s^{k_s}(\mathscr{A})).$$

定义 1.2 (循环子空间，循环变换，循环向量). 设 $\alpha \in V$, 由 α 生成的 (相对于 $\mathscr{A}$ 的) 循环子空间定义为

$$C(\alpha) = C_{\mathscr{A}}(\alpha) := \bigcap_{\alpha \in W \subset V:\text{不变子空间}} W$$

即 $C(\alpha)$ 是包含 α 的 $\mathscr{A}$ 的最小的不变子空间.

易知 $C(\alpha) = \mathrm{Span}(\{\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}^2(\alpha), \ldots, \mathscr{A}^m(\alpha), \ldots, \}) = \{f(\mathscr{A})(\alpha) \mid f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]\}$.

称线性变换 $\mathscr{A} : V \longrightarrow V$ 是循环变换，如果存在 $\alpha \in V$，使得 $V = C_{\mathscr{A}}(\alpha)$。称 α 为 $\mathscr{A}$ 的循环向量。

定理 1.2 (循环分解定理，不变因子). 设 $\mathscr{A} : V \longrightarrow V$ 是线性变换, 其中 $dimV = n$, 则存在 $0 \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t \in V$, 使得 $V = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_t)$, 且 $d_{\alpha_1}(\lambda)|d_{\alpha_2}(\lambda)|\cdots|d_{\alpha_t}(\lambda)$. 且这样的分解唯一.

称称 $d_1(\lambda)$ $d_2(\lambda), \ldots$ $d_t(\lambda)$ 为 $\mathscr{A}$ 的不变因子.

问题 1.1. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明: 如果 $\mathscr{A}^2$ 是循环变换，则 $\mathscr{A}$ 也是循环变换。逆命题是否成立?

定义 1.3 (不可分解性). 设 $W \subset V$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，如果 W 不能分解为 $\mathscr{A}$ 的两个非平凡的不变子空间的直和，即不存在 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 $W_1, W_2 \subset V$, 使得 $W_1 \neq \{0\}, W_2 \neq \{0\}$ 而 $W = W_1 \oplus W_2$, 则称 W(相对于 $\mathscr{A}$) 不可分解. 否则，称 W(相对于 $\mathscr{A}$) 可分解；如果 V 相对于 $\mathscr{A}$ 不可分解，则称线性变换 $\mathscr{A}$ 不可分解. 否则，称线性变换 $\mathscr{A}$ 可分解.

定理 1.3 (完全分解定理，初等因子). $\mathscr{A} : V \longrightarrow V$ 是线性变换, 其中 $dimV = n$, 则)V 可分解为有限个相对于 $\mathscr{A}$ 不可分解的循环子空间的直和, 即有直和分解 $V = C_{11} \oplus \cdots \oplus C_{1t_1} \oplus C_{21} \oplus \cdots \oplus C_{2t_2} \oplus \cdots \oplus C_{s1} \oplus \cdots \oplus C_{st_s}$, 且这样的分解唯一, 其中 C_{ij} 是相对于 $\mathscr{A}$ 的循环子空间，且 $d_{\mathscr{A}|_{C_{ij}}}(\lambda) = p_i^{k_{ij}}(\lambda)$.

称 $p_i^{k_{ij}}$ 为 $\mathscr{A}$ 的初等因子，其由 $\mathscr{A}$ 唯一决定

命题 1.4 ($\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准形). $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准形较为特殊，为 $J(\lambda_0, n) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. 此为每个初等因子对应的 Jordan 块.

命题 1.5 (求 Jordan 块个数的一个方法). 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 有特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, A 的 *Jordan* 标准形中 k 阶 *Jordan* 块 $J(\lambda_0, k)$ 的个数是 $N(k) = R((A-\lambda_0 E)^{k-1}) + R((A-\lambda_0 E)^{k+1}) - 2R((A-\lambda_0 E)^{k})$.

定义 1.4 (λ 矩阵). λ 矩阵是元素为多项式的矩阵, 全体 λ 矩阵的集合记作 $\mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$, 每个矩阵记作 $A(\lambda)$.

命题 1.6 (Smith 标准型，不变因子，行列式因子，初等因子). 设 $A(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$, 且 $R(A(\lambda)) = r$, 则有 $A(\lambda) \sim S(\lambda) = \begin{pmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 其中 $D(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda))$ 是 r 阶对角阵 ,$d_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 是首一多项式, 满足 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \cdots \mid d_r(\lambda)$. 称其为 $A(\lambda)$ 的 *Smith* 标准形.

对于一个矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 其特征矩阵 $\lambda E - A$ 的 *Smith* 标准形中的 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ 称为不变因子, 不变因子的不可约分解得到的 $p_i^{k_{ij}}(\lambda)$ 称为初等因子,k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶非零子式的首一最大公因式.

我们可以把 λ 矩阵看成多项式环上的矩阵 $\mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$，也可以看成矩阵系数多项式 $\mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$, 由这个角度讨论，我们得到矩阵相似分类的完整结果.

定理 1.7 (矩阵相似的等价条件). $A \approx B \Longleftrightarrow \lambda E - A \sim \lambda E - B$, 等价地, $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 有相同的初等因子, 或行列式因子, 或不变因子.

2 习题

2.1 根子空间分解

问题 2.1. V 为线性空间,$f(\lambda) = f_1(\lambda)\cdots f_k(\lambda)$, 且 $f_1(\lambda), \cdots, f_k(\lambda)$ 两两互素,$\mathscr{A}: V \to V$ 为线性变换, 求证:

$$\ker(f(\mathscr{A})) = \ker(f_1(\mathscr{A})) \oplus \cdots \oplus \ker(f_k(\mathscr{A}))$$

问题 2.2. 证明:n 维复线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当所有根向量都是特征向量.

2.2 不变因子，行列式因子，初等因子，Smith 标准形，λ 矩阵

问题 2.3. 设 A 是 n 阶复矩阵,

(1) 用 A 的行列式因子来表示 A 的不变因子.

(2) 用 A 的不变因子来表示 A 的行列式因子.

(3) 用 A 的不变因子来表示 A 的初等因子.

(4) 用 A 的初等因子来表示 A 的不变因子.

问题 2.4. 求 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ 的 *Smith* 标准形, 行列式因子, 不变因子和初等因子.

问题 2.5. 设矩阵 $A(\lambda) \in F[\lambda]^{6\times 7}$ 的秩为 4, 有初等因子 $\lambda, \lambda, \lambda^3, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, (\lambda+1)^2$. 求 $A(\lambda)$ 的不变因子和 *Smith* 标准形.

2.3 Jordan 标准形，矩阵相似

问题 2.6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的 *Jordan* 标准形 J, 并求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = J$ 。

问题 2.7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A^n (n \geqslant 1)$.

问题 2.8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_n = 3a_n - 1 - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ $(n \geqslant 4)$, 且 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1$, 求 a_n 的通项公式.

问题 2.9. 设 $A \in F^{n\times n}$ 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^n$, 证明: A 可逆, 且对于任意非零整数 m, A 和 A^m 相似.

问题 2.10. 证明:n 阶复方阵 A 和 B 相似的充分必要条件是,对于每个复数 a 和每个正整数 k, $R(aE_n - A)^k = R(aE_n - B)^k$.

问题 2.11. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^k = O$. 证明:矩阵$I + A$ 与$I + A + \dfrac{A^2}{2!} + \cdots + \dfrac{A^{k-1}}{(k-1)!}$相似.

问题 2.12 (Jordan-Chevalley 分解). (1) 设 A 为 n 阶复矩阵，证明:A 可分解为 $A = S + N$, 其中 S 可对角化，N 为幂零阵 ,S, N 可写为 A 的多项式，且 $SN = NS$. 并证明这种分解是唯一的.

(2) 设 A 为 n 阶可逆复矩阵，证明:A 可分解为 $A = SU$, 其中 S 可对角化 ,U 的特征值全为 1,S,U 可写为 A 的多项式，且 $SU = US$. 并证明这种分解是唯一的.

问题 2.13 (对称分解). 任一复方阵可以写成两个对称复方阵的乘积, 并且可以指定其中一个是可逆的.

2.4 杂题

Jordan 标准形最大的作用之一就是让我们在讨论矩阵问题时总可以化归到 Jordan 块上进行操作，而这样的操作往往更容易.

问题 2.14. 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的初等因子是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_l)^{k_l}$, 设 $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ (当 A 可逆时, 可以假设 $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$), 满足对 $i = 1, \ldots, l$ 都有 $f'(\lambda_i) \neq 0$, 证明: $f(A)$ 的初等因子是 $(\lambda - f(\lambda_1))^{k_1}, \ldots, (\lambda - f(\lambda_l))^{k_l}$.

问题 2.15. 设 A 为 n 阶非奇异复矩阵. 证明: 对任一正整数 m, 存在 n 阶复矩阵 B, 使得 $A = B^m$.

问题 2.16. 设 $A \in C^{n\times n}$, 计算 $AX = XA$ 的解空间维数.

问题 2.17. 设 $A \in C^{n\times n}, B \in C^{m\times m}$, 证明:$AX = XB$ 仅有零解的充分必要条件为 A, B 无公共特征值.

问题 2.18. $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 证明:$X^2 = A$ 无解.

问题 2.19. A 为 n 阶复矩阵. 定义 $W := \{\alpha \in \mathbb{C}^n |$存在正整数$l$, 使得$A^l\alpha = 0\}$.

(1) 证明:W 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间.

(2) 设 $dim\, W = m$, 证明: 对任意整数 $k \geq m$, 总有 $R(A^k) + m = n$.

问题 2.20. 设方阵 $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$，证明: 以下陈述等价

(1) A 为非减次方阵，也即 A 的特征多项式等于极小多项式.

(2) 与 A 交换的每个矩阵 B 都可以写成 A 的多项式 $f(A)$.

有许多问题实际为此问题特例，试举一例.

问题 2.21. 设 A B 都是 n 阶方阵，$R(A) = n - 1$。证明: 如果 $AB = BA = O$，那么存在多项式 $g(x)$，使 $B = g(A)$.

利用 Jordan 标准形可以求解一些矩阵级数的问题（虽然这类问题用相似上三角化亦可处理）.

问题 2.22. 定义矩阵幂级数 $e^A = 1 + A + \dfrac{A^2}{2} + \cdots + \dfrac{A^n}{n!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n}{n!}$. 证明:$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(a)}$.