T2.20. 必要性. $A\sim B$ i.e. $A=P^{-1}BP$.

$$R(aE-A)^k = R(P(aE-B)^kP^{-1}) = R(aE-B)^k.$$

充分性: 不妨考虑,

$$A=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda) & \\ & J_{n_2}(\lambda)\end{bmatrix}$$ 更多 λ 的 Jordan 块以及不同特征值的情况类似.

$$=\left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda & 1 & & & & & & \\ & \lambda & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \end{array}\right]$$

$\therefore$ 取 $a=\lambda$, k 分别取 $1,2,\cdots,\max\{n_1,n_2\},\max\{n_1,n_2\}+1$ 即可确定.

B 也有 $J_{n_1}(\lambda)$, $J_{n_2}(\lambda)$ 这两个 Jordan 块. 从而 $A\sim B$. □.

T2.19. (1) 容易验证. W 的定义实际上就是 0 特征值对应的根子空间.

(2) 不妨考虑:

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} J & (\lambda_1) \\ & \ddots \\ & & J\end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} J & (0) \\ & \ddots \\ & & J\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

λ_1 对应的若干个 Jordan 块.

$\to$ A^k 后全部为0. 且应该就是 $m\times m$ 阶的方阵.

$\therefore$ $k\geq m$ 即可

于是就得: $(k\geq m)$ $R(A^k)=n-m$. □.

T2.18. 可以确定 $A\sim J_3(0)=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$. 可由几何重数直接得到.

问题变为 $X^2=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$ 无解. 首先 X 的特征值也全为 0.

$\therefore\ \exists P$ s.t. $PXP^{-1}=J$ $J=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$

而 $R(X^2)=R(J^2)\leq 1\neq R(A)$. 矛盾. □.

提问: 如果 $A=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$, 那 $X^2=A$ 有解吗?

T2.12. (1) 可知：

$$A \sim \begin{pmatrix} \begin{matrix} J_{\cdot}(\lambda_1) & \\ & J \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} J_{\cdot}(\lambda_k) & \\ & J \end{matrix} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_{\lambda_k} \end{pmatrix}}_{\text{对角阵}} + \begin{pmatrix} N & & & & \\ & N & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N & \\ & & & & N \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\Delta}{=} S \qquad \overset{\Delta}{=} N$$

S, N 的分解的确是唯一的，且 $SN = NS$ 是容易验证的。

只需验证 S, N 均可写为 A 的多项式。

先考虑 $A_1 = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \\ & J_{n_2}(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}}_{S} + \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{N}$

相同特征值。

而 $S = d_{A_1}(A_1) + \lambda E$ 是 A_1 的多项式。$\Rightarrow$ 自然 $N = A_1 - S$ 也是。

而不同 λ 之间能否有这样的结果？

现令 $A_2 = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) \end{pmatrix}$ 由于 $d_{J_{n_1}(\lambda_1)}(x)$ 与 $d_{J_{n_2}(\lambda_2)}(x)$ 互素，

$\therefore$ 由 $\boxed{\text{中国剩余定理}}$ $\exists\ f(x)$ s.t. $\begin{cases} f(x) \equiv \lambda_1 \mod d_{J_{n_1}(\lambda)}(x) \\ f(x) \equiv \lambda_2 \mod d_{J_{n_2}(\lambda)}(x) \end{cases}$ □.

(2) 类似的讨论，此时

$$A_3 = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{\lambda} \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{u}$$

→ 因此需要 $\lambda \neq 0$，i.e. A 可逆。

□

T2.13. 同样的，我们只需考虑将 $A \sim J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 按要求分解即可。

$$\| $$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 & \lambda \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & \lambda & & \\ \lambda & & & \end{pmatrix}}_{\bar{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_{\bar{T}}$$

那么此时的 $A = P^{-1}\bar{S}\bar{T}P = \underbrace{(P^{-1}\bar{S}(P^{-1})^T)}_{S}\underbrace{(P^T\bar{T}P)}_{T}$.

□

T2.11. $A^k=0 \dashrightarrow A\sim\begin{bmatrix}N_1&&\\&\ddots&\\&&N_k\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}=J(0)$.

仍对其中一个Jordan块先考虑：i.e. $A=\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix} \dashrightarrow \boxed{A^m=0}$ $m<k$.

$\therefore I+A=J(1)$，因此要证：$B\triangleq I+A+\cdots+\frac{A^{m-1}}{(m-1)!}=\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{2!}&\cdots&\frac{1}{(m-1)!}\\&1&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\frac{1}{2!}\\&&&\ddots&1\\&&&&1\end{bmatrix}\to$ 特征值只有1.

与$J(1)$相似. $\Leftrightarrow$ B有一个$J(1)$的Jordan块

$\Leftrightarrow$ B对于$\lambda=1$的几何重数$=1$. $\to$ 对应于Jordan块个数

而可以知道：$R(E_n-B)=n-1 \to B$对于1的几何重数为1. $\to B\sim A$.

而 $A=\begin{bmatrix}N_1&\\&N_2\end{bmatrix}$时，可知：$B=\begin{bmatrix}P_1^{-1}&\\&P_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_1(1)&\\&J_2(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&\\&P_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}J_1(1)&\\&J_2(1)\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}J_1(1)&\\&J_2(1)\end{bmatrix} = I+A.$$

事实上，用同样的方法可证：对于任意 $m\geq1$，均有：

$$I+A\sim I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{m!}A^m$$ (更一般情况即T2.14) □

T2.15. 考虑：$A=J_n(\lambda_1)=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_1\end{bmatrix}$. 如果可证：$A^m\sim J_n(\lambda_1^m)$ 那么即可得证.

↓

我们可取 $B=P\left[J_n(\lambda_1^{\frac{1}{m}})\right]P^{-1}$.

而证明与T2.11(上题)类似，我们考虑A^m关于λ_1^m的Jordan块个数(i.e. 几何重数).

$A=\lambda E+N \quad \therefore A^m=\lambda_1^mE+\underbrace{C_m^1\lambda_1^{m-1}}_{\neq0}N+\cdots+C_m^{m-1}\lambda_1N^{m-1}+N^m$

↓

$R(A^m-\lambda_1^mE)=n-1 \to$ 几何重数为1.

从而A^m只有一个λ_1^m对应的Jordan块，即：$A^m\sim J_n(\lambda_1^m)$. □

T2.14. 换言之：即 $A \sim \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_\ell}(\lambda_\ell) \end{bmatrix}$ λ_i可能相同.

多项式 f. $\downarrow$ $f'(\lambda_i)\neq 0$

$$f(A) \sim \begin{bmatrix} J_{k_1}(f(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_\ell}(f(\lambda_\ell)) \end{bmatrix}$$

同样的，我们先考虑一个Jordan块的情况 $A = J_n(\lambda_1)$.

以及考虑 f 为单项式 $f = ax^m$ 的情况：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad aA^m = \begin{bmatrix} a\lambda_1^m & aC_m^1\lambda_1^{m-1} & aC_m^2\lambda_1^{m-2} & \cdots & \\ & a\lambda_1^m & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & aC_m^2\lambda_1^{m-2} \\ & & & \ddots & aC_m^1\lambda_1^{m-1} \\ & & & & a\lambda_1^m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda_1^m & \boxed{af'(\lambda_1)} & \cdots & * \\ & a\lambda_1^m & \ddots & \\ & & \ddots & af'(\lambda_1) \\ & & & a\lambda_1^m \end{bmatrix}$$ 非零.

于是由条件 $f'(\lambda_i)\neq 0$. $\therefore R(aA^m - a\lambda_1^m) = n-1$ → 几何重数为1.

$$\text{i.e. } aA^m \sim J_n(a\lambda_1^m).$$

于是完全可以证得 $f\in\mathbb{C}[\lambda]$ 的命题. 当 A 可逆时：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & & \\ & \lambda^{-1} & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda^{-2} \\ & & & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$ → 对应于 $(\frac{1}{x})'$. → 从而此时 $f\in\mathbb{C}[\lambda, \frac{1}{\lambda}]$ ✓

对应于 $\frac{1}{x}$

□.

问题：如果 $f'(\lambda_i)=0$ 怎么办？考虑一种简单的情况：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = J_n(0)$$, $f(x)=x^2$ 时. 也就是 A^2 的Jordan标准型?

$\downarrow$

$f'(0)=0$

Answer：在 2024.12.7 的 高代加 Jordan标准型有解答.

T2.22 考虑 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = J_n(\lambda)$.

从而 e^A 对角线元素为：$1+\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\cdots+\frac{1}{n!}\lambda^n+\cdots = e^\lambda$.

$\therefore \det(e^A) = e^{n\lambda} = e^{tr(A)}$.

Rmk：应用于 $\boxed{\text{ODE}}$ 多线性的解：

eg. $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} y = \begin{pmatrix} 2y_1+y_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$.

于是其解为：$y = C \cdot e^{Ax}$ 定义如 T2.22. □.

$\boxed{\text{T2.20}}$ 很重要的一T 一般性结论.

$\varphi_A = d_A \Rightarrow$ 每个不同特征的 λ_i 只有一个 Jordan 块. $\cdots$ 只有一个 λ_i 的初等因子.

$A = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$ λ_i 各不相同.

条件1.

为简便，我们令 $A = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \\ & J(\lambda_2) \end{bmatrix}$，将 B 分块：$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

$AB = BA$ $\begin{bmatrix} J(\lambda_1)B_{11} & J(\lambda_1)B_{12} \\ J(\lambda_2)B_{21} & J(\lambda_2)B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}J(\lambda_1) & B_{12}J(\lambda_2) \\ B_{21}J(\lambda_1) & B_{21}J(\lambda_2) \end{bmatrix}$

$\therefore$ 对任意的 i, j，应该有：$J(\lambda_i)B_{ij} = B_{ij}J(\lambda_j)$

($i=j$ 时) 展开硬算 $\Rightarrow B_{ii} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & \cdots \\ & a & b & d & \cdots \\ & & a & b & \cdots \\ & & & a & \ddots \end{bmatrix}$

而显然 B_{ii} 可由 $(J(\lambda_i) - \lambda_i E)$ 的多项式

也就是 $J(\lambda_i)$ 的多项式表示.

($i \neq j$ 时)

$(J(\lambda_i) - \lambda_i E)^n B_{ij} = B_{ij}(J(\lambda_j) - \lambda_i E)^n$

$\| $

0

$\Rightarrow B_{ij} = 0$

条件2.

根据 T2.12 中国剩余定理的应用，可知 B 最终可写为 A 的多项式.

↑

条件1与条件2等价的关键.

T2.16. ① 假设:

$$A=\begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{pmatrix}$$ 其中 λ_i 各不相同.

↳ 对应于 T2.20 的非减次方阵.

于是按照 T2.20 的做法, 对 X 分块得: $\boxed{J(\lambda_i)X_{ij}=X_{ij}J(\lambda_j)}$

于是: $$X=\begin{pmatrix} f_1(J(\lambda_1)) & & & \\ & f_2(J(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{f_g}(J(\lambda_g)) \end{pmatrix}$$

↳ $\{f_n\}$ 的维数为 n_i.

再记 $J(\lambda_i)$ 的大小为 $n_i\times n_i$ 的, 故 $J(\lambda_i)$ 的极小多项式次数为 n_i.

$$\therefore \dim\{X\}=\dim\{f_1\}+\cdots+\dim\{f_g\}=\sum_{i=1}^{g}n_i.$$

② 现在考虑: A 有两个以上相同特征值的 Jordan 块.

为简便, 考虑 $$A=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$ --→ 相同特征值.

但由 $AX=XA$ 仍有: $\boxed{J_{n_i}(\lambda_1)X_{ij}=X_{ij}J_{n_j}(\lambda_1)}$

设 $n_i<n_j$ $$\underbrace{(J_{n_i}(\lambda_1)-\lambda_1E)^{n_i}}_{=0}X_{ij}=X_{ij}\underbrace{(J_{n_j}(\lambda_1)-\lambda_1E)^{n_i}_{n_j\times n_j}}$$

未知元.

也就是 $$0=X_{ij}\left.\begin{pmatrix} \overbrace{0\ \cdots\ 0}^{n_i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\right\} n_j$$

从而 $\dim\{X_{ij}\}=n_i=\min\{n_i,n_j\}$

$$\therefore \dim\{X\}=\sum_{\text{任意}i,j}\{X_{ij}\}=\sum_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le k}}\min\{n_i,n_j\}.$$

$n_i(\lambda_g)$ 对应了 λ_g 的第 i 个 Jordan 块.

③ 结合 ①② 使得一般情况: $$\dim\{X\}=\sum_{g\text{个特征值}}\ \sum_{1\le i,j\le k_g}^{(\lambda_g)}\min\{n_i(\lambda_g),n_j(\lambda_g)\}$$

T2.17. 可由 T2.16 的证明过程直接得到，只是变成 $J_A(\lambda_i)X_{ij} = X_{ij}J_B(\lambda_j)$.

T2.21. 由于 $AB = BA$，因此可同时上三角化.

i.e. 可令 A, B 已然是一个上三角阵.

$$\begin{pmatrix}\Lambda_A & * \\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\Lambda_B & * \\ 0 & b\end{pmatrix}$$

从而由 $AB = 0$ 得。 $\underbrace{\boxed{\Lambda_A}}_{\text{可逆}}\Lambda_B = 0 \Rightarrow \Lambda_B = 0$.

也就是 $R(B) \leq 1$. 当 $R(B) = 0$ i.e. $B = 0$ 是显然的，而当 $R(B) = 1$ 时的情况:

由于 $R(A) = n-1$ $\therefore$ ~~φ_A~~ 0是一个特征值，$d_A(x) = x \cdot g(x)$

$\therefore$ $d_A(A) = A \cdot \underbrace{g(A)}_{\neq 0\ \text{就是}B} = 0$