数学外卖高等代数讲座——线性映射

梁海纳、刘欣晨

2025 年 4 月 13 日

1 矩阵表示

题目 1.1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ 为定映射，定义映射 $\varphi_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为 $\varphi_A(X) = AX - XA$。

1. 证明 φ_A 是线性变换。

2. 若 $n = 2$ 且 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，写出 φ_A 在标准基 $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ 下的矩阵。

3. 若 A 可对角化，证明 φ_A 也可对角化。

题目 1.2. *(1)* 设 V 为有限维线性空间. 证明: 不存在 V 上的线性变换 A, B, 使得 $AB - BA = E_V$.
(2) 构造无限维线性空间 V 以及 V 上的线性变换 A, B, 使得 $AB - BA = E_V$.

2 像、核、不变子空间

题目 2.1. *6.* 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间, φ 是 V 上线性变换, 求证:

1. $\dim U - \dim \operatorname{Ker} \varphi \le \dim \varphi(U) \le \dim U$;

2. $\dim \varphi^{-1}(U) \le \dim U + \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

题目 2.2. 设 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, 且满足 $(f(x), g(x)) = 1$. 设 V, V_1, V_2 分别是

$$f(A)g(A)X = 0, \quad f(A)X = 0, \quad g(A)X = 0$$

的解空间. 证明: $V = V_1 \oplus V_2$.

题目 2.3. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换,

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi\xi \mid \xi \in V\}, \quad \operatorname{Ker} \varphi = \{\xi \mid \varphi\xi = 0, \xi \in V\}.$$

证明：$\operatorname{Im} \varphi^2 = \operatorname{Im} \varphi$ 当且仅当 $\operatorname{Ker} \varphi^2 = \operatorname{Ker} \varphi$.

题目 2.4. 设 $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足: $\varphi^2 = \varphi$ 且 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$. 求证: $r(\varphi) = r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + \cdots + r(\varphi_m)$ 成立的充要条件是 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j = 0\ (i \ne j)$.

3 特征值与特征向量

题目 3.1. 设 A 是 n 阶实方阵，已知 A 的特征值全是实数且 A 的一阶主子式之和与二阶主子式之和都为零，求证：A 是幂零矩阵。

题目 3.2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\geq n$。求证：

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$$

题目 3.3. 设 ϕ,ψ 是数域 F 上的线性空间 V 上可交换的线性变换，且 ϕ,ψ 的特征值都在 F 中。求证：ϕ 和 ψ 至少有一个公共的特征向量。

题目 3.4. 设 A 是 n 阶矩阵，$A=(a_{ij})$，若对任意的 $i=1,2,\ldots,n$，满足：

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{1}$$

则称 A 为严格对角占优矩阵。求证：严格对角占优矩阵必是可逆矩阵

题目 3.5. 设 A,B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，且满足交换性条件 $AB=BA$。若 A 和 B 的特征值均属于 $\mathbb{F}$，则存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 P，使得：$P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵。

题目 3.6. 设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，求证：若 A，B 没有公共的特征值，则矩阵方程

$$AX = XB \tag{2}$$

只有零解 $X=O$。

题目 3.7. 设 n 阶方阵 A，B 的特征值全大于零且满足 $A^2=B^2$，求证：

$$A = B \tag{3}$$