高等代数 (下) 期末讲座

王衡宇　杨磊

2025 年 6 月 14 日

1. 设 V 是所有 n 阶实矩阵在通常的加法和数乘运算下构成的实线性空间, 而 W 是由所有 n 阶实对称矩阵构成的 V 的子空间. 取定 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{P}$, 定义映射 $T: V \to V$, 其中 $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}$.

(1) 证明 T 是 V 上的线性变换, 并且 W 是 T 的不变子空间;

(2) 设 $n=2$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 试问 W 上的线性变换 $T|_W$ 是否可对角化?

2. 设方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$, 并求出实可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$;

(2) 试求三阶方阵 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{N}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{N}$, 并且 $\boldsymbol{S}$ 可对角化, $\boldsymbol{N}$ 幂零, 并且 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{S}$;

(3) 定义 $C(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\}$, 其在通常的矩阵加法和数乘运算下构成一个实线性空间, 试求 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数 $\dim C(\boldsymbol{A})$.

3. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, 记 $\operatorname{End} V$ 为 V 上的线性变换关于通常的加法和数乘构成的线性空间. 给定线性变换 $T: V \to V$, 定义线性变换

$$\begin{aligned} L_T : \operatorname{End}(V) &\to \operatorname{End}(V) \\ S &\mapsto TS. \end{aligned}$$

(1) 证明 L_T 与 T 有相同的极小多项式, 进而 T 可对角化当且仅当 L_T 可对角化;

(2) 用 $\det T$ 和 $\operatorname{Tr}(T)$ 表示 $\det L_T$ 和 $\operatorname{Tr}(T)$.

4. 设 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\lambda, n)$ 为特征值为 λ 的 n 阶 Jordan 块, 试求 $\boldsymbol{J}^2, \operatorname{adj}(\boldsymbol{J}), \exp(\boldsymbol{J})$ 的 Jordan 标准形.

5. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(\varphi(\lambda), g'(\lambda)) = 1$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $g(\boldsymbol{A})$ 可对角化.

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶复方阵, 且有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$, 证明 $\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

7. 设有 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型 $Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$, 其中 a 是正实数. 已知 $Q(\boldsymbol{x})$ 在单位球面 $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 上的最大值和最小值分别为 2 和 -4.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $Q(\boldsymbol{x})$ 化为标准形, 其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$.

8. 设 V 是二阶实矩阵关于通常的加法和数乘运算构成的实线性空间, 又设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 定义 V 上的二元函数 $(,) \colon V \times V \to \mathbb{R}$, 其中 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})$. 定义线性变换 $\operatorname{ad}_{\boldsymbol{A}} : V \to V$, 其中 $\operatorname{ad}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$.

(1) 证明 : $(,)$ 是 V 上的内积 ;

(2) 试求 $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{A}}$ 的像空间 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{\boldsymbol{A}})$ 相对于该内积的标准正交基.

9. 设有实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&3&-4\\1&3&-5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-4\\0&1&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

(1) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$;

(2) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{C}$;

(3) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$.

10. 设 $V=\mathbb{R}^n$, 其在标准内积下构成欧氏空间. 取定非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 定义线性变换 $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}:V\to V$, 使得任意 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 有

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}-\frac{2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}.$$

(1) 证明: $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 V 上的正交变换 ;

(2) 证明: $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ 可对角化 ;

(3) 试求 $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵, 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 分量为 1 其余分量均为 0 的单位向量.

11. 承上题, 称线性变换 $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ 为以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为法向的镜面反射.

(1) 若 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 是 V 中长度相等的不同向量, 试求镜面反射 $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ 使得 $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\delta}$;

(2) 证明欧氏空间 V 上的正交变换均可表示为不超过 n 个镜面反射的乘积.

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实正定阵, 证明 $(\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))^{\frac{1}{n}}\geq(\det\boldsymbol{A})^{\frac{1}{n}}+(\det\boldsymbol{B})^{\frac{1}{n}}$, 并求出等号成立的充要条件.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实方阵, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵, 证明 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leq\det(2\boldsymbol{A})$, 并求出等号成立的充要条件.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实正定阵, 证明 n 元二次型

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}$$

是负定的, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

15. 证明如下命题:

(1) 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实正定阵, 则 $\det\boldsymbol{A}\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 并且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵;

(2) 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $|\det\boldsymbol{A}|\leq\prod\limits_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{\alpha}_i\|$, 并且等号成立当且仅当向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是正交向量组或者其中有零向量;

16. 解决如下问题:

(1) (极分解定理) 若实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明存在唯一的一对正定阵 $\boldsymbol{S}$ 和正交阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SU}$;

(2) 将极分解定理推广到复矩阵的情形, 并证明复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: 存在 Hermite 正定矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $\boldsymbol{HAH}^{-1}$ 是正规方阵;

(3) 若实可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的极分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SU}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正规方阵当且仅当 $\boldsymbol{SU}=\boldsymbol{US}$.