“数学外卖”高等代数讲座：“内积空间与双线性型”

赵思铭　王衡宇

2025 年 6 月 6 日

例题 1　求可逆阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

例题 2　设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, 则 $Z \in \mathbb{R}^n$ 是线性方程组 $AX = \beta$ 的最小二乘解的充分和必要条件是:Z 是线性方程组 $A^TAX = A^T\beta$ 的解.

例题 3　证明: 任意二阶酉矩阵 U 可以分解为 $U = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\tau & sin\tau \\ -sin\tau & cos\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_4} \end{bmatrix}$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 和 τ 是实数.

例题 4　求正交阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角阵，并求出该对角阵，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

例题 5　设 V 是 n 维欧式空间，其中 $n \geq 2$. 设 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，证明: 下面命题等价

(1)$\mathscr{A}$ 是 V 上的镜面变换，即存在 V 中的超平面 W，使得对任意 $\alpha = \beta + \gamma \in V$，其中 $\beta \in W$,$\gamma \in W^{\perp}$, 有 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta - \gamma$

(2) 存在 V 的非零向量 η, 满足 $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2\dfrac{(\alpha, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta, \quad \forall \alpha \in V$

(3) 存在 V 的标准正交基 $\eta_1, ..., \eta_n$，使得 $\mathscr{A}(\eta_1) = -\eta_1, \mathscr{A}(\eta_i) = \eta_i, \quad i = 2, ..., n;$

(4)$\mathscr{A}$ 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵有形式 $E_n - 2\delta\delta^T$, 其中 δ 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量.

例题 6　设 n 维线性空间 V 上的二次型 $Q(\alpha) = X^TAX$, 其中 A 是对称阵，X 是 α 在该表达式对应的基下的坐标. 将 A 的 k 阶顺序主子式记为 D_k，设 $D_1, ..., D_n$ 都非零. 证明: 存在 V 上的可逆坐标变换 $X = PY$，使得二次型化为 $Q(\alpha) = D_1y_1^2 + \dfrac{D_2}{D_1}y_2^2 + \cdots + \dfrac{D_n}{D_{n-1}}y_n^2$.

例题 7　设有实矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 证明:

(1)A 和 B 相似的充分必要条件是 $a=3,b=\dfrac{2}{3}$;

(2)A 和 B 合同的充分必要条件是 $a<2,b=3$.

例题 8　设 n 阶实对称阵 A 和 B 都是半正定的. 证明:$|A+B|\geq|A|+|B|$.

例题 9　设 f 是 n 维实线性空间 V 上的双线性函数, 并且对任意非零向量 $\alpha\in V$, 有 $f(\alpha,\alpha)>0$. 证明: 存在 v 的一组基，使得 f 在这组基下的矩阵是如下的准对角阵.

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}1 & a_1\\ -a_1 & 1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1 & a_s\\ -a_s & 1\end{pmatrix},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2s}\right\},$$

其中 $a_1\geq a_2\geq\cdots a_s>0$.