1. (1)(2)

$$\text{行列式因子：}\quad \underset{\substack{\| \\ d_1(\lambda)}}{D_1(\lambda)} \quad \underset{\substack{\| \\ d_1(\lambda)d_2(\lambda)}}{D_2(\lambda)} \quad \cdots \quad \underset{\substack{\| \\ d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)}}{D_n(\lambda)}$$

$$\text{不变因子：}\quad \underset{\substack{\| \\ D_1(\lambda)}}{d_1(\lambda)}, \quad \underset{\substack{\| \\ D_2(\lambda)/D_1(\lambda)}}{d_2(\lambda)} \quad \cdots \quad \underset{\substack{\| \\ D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)}}{d_n(\lambda)}$$

(3)(4) 不变因子

$$d_1(\lambda) = \boxed{(\lambda-\lambda_1)^{l_{11}}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{21}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{s1}}$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_{12}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{s2}}$$

$$\vdots$$

$$d_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_{1n}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{2n}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{sn}}$$

$(\lambda-\lambda_i)$的指数从小到大（可取0）.

$(\lambda-\lambda_i)^{l_{ij}}$ 为初等因子. $l_{i\boxed{j}} \leq l_{i\boxed{j+1}}$ □

2. (1) $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①}$ 化为 Smith 标准型

$\downarrow$ ②

求行列式：$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$= (\lambda+1)(\lambda-1)^2$

不变因子为 $1, 1, \boxed{(\lambda+1)(\lambda-1)^2}$

或 $1, (\lambda-1), \boxed{(\lambda+1)(\lambda-1)}$

必为极小多项式.

但 $(A+E)(A-E) \neq 0$ （排除第二种情况）

$\therefore$ 初等因子为 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)$.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $P^{-1}AP = J \dashrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3)$

$(A+E)\alpha_1=0$　取 $\alpha_1=(1,0,2)^T$

$(A-E)\alpha_3=0$　取 $\alpha_3=(1,1,1)^T$

$(A-E)\alpha_2=\alpha_3$　取 $\alpha_2=(0,1,0)^T$

$$\left.\right\} \longrightarrow P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$$

(3) $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-2&1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}$　$\therefore A^{2024}=(PJP^{-1})^{2024}$

$$=PJ^{2024}P^{-1}=\begin{bmatrix}-4047&2024&2024\\-4048&2025&2024\\-4048&2024&2025\end{bmatrix}.$$

(4) $B^{2025}=A$　i.e.　$P^{-1}B^{2025}P=(P^{-1}BP)^{2025}=P^{-1}AP=J$

$$\therefore P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&1/2025&1\end{bmatrix}\rightarrow B=\frac{1}{2025}\begin{bmatrix}6073&1&-4049\\-2&2026&1\\8098&1&-6074\end{bmatrix}.$$

(5) $P^{-1}AP=P^{-1}SP+P^{-1}NP=J=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&&\\0&1&\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&&\\0&0&\\0&1&0\end{bmatrix}}_{\text{可交换}}$

可交换. $\therefore$ S与N可交换

$$\therefore S=\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\4&0&-3\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}-2&1&1\\-2&1&1\\-2&1&1\end{bmatrix}.$$

(6) 易求出: $C(J)=\left\{\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&c&b\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\cong C(A).$

$\therefore \dim C(A)=\dim C(J)=3.$

一组基为. $\{E_{11},\ E_{22}+E_{33},\ E_{32}\}.$　□

3. $A$可对角化 $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda_0$, $R(\lambda_0 I_n-A)^2=R(\lambda_0 I_n-A)$.

$\Rightarrow$ i.e. $\exists P$ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 I&&&\\&\lambda_2 I&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k I\end{bmatrix}.$

不妨令 $\lambda_0=\lambda_1$，则 $R(\lambda_0 I_n-A)^2=R(\lambda_0 I_n-A)$ 是显然的.

$\Leftarrow$ 对 $A$（假设不可对角化）进行 Jordan 标准化：

$$P^{-1}AP=\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \quad \lambda_1 & \\ \hline & & & & J \end{array}\right]$$

则此时 $R(\lambda_1 I_n-A)^2<R(\lambda_1 I_n-A)$ 矛盾. $\square$

4. $$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

$R(J)=1$ $\nearrow$ $\begin{bmatrix} * & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ $*=Tr(A)$.

$\searrow$ $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ $\square$

5. $$\lambda E-A^2=\begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & \\ -1 & 0 & \lambda & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \lambda & \\ & & & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$ 的 $n-2$ 阶行列式因子必为 1.

$\therefore$ 不变因子为 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-2\text{个}},?,\boxed{?}$ $\leftarrow m_A(\lambda)$
（和写）

而当 $n=2m$ 时，$\lambda^m$ 是 $\underset{A^2\text{的}}{\text{极小多项式}}$，不变因子：$\underbrace{1,\cdots,1}_{n-2\text{个}},\lambda^m,\lambda^m$.

当$n=2m+1$时，$\lambda^{m+1}$是极小多项式，不变因子：$\underbrace{1,\cdots,1}_{n-2\text{个}},\lambda^{m},\lambda^{m+1}$. $\square$

6. $P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$

A是非奇异的，i.e. 每一个Jordan块$J_i$对角线元素非0

- 若$\exists\, G_i$ s.t. $G_i^{m}=J_i$，则令$B=P\begin{bmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_k \end{bmatrix}P^{-1}$即可

$\downarrow$

- 需证：$\underline{(J_n(a))^{m}}\simeq J_n(a^{m})$ $\Leftrightarrow$ $J^{m}$仍只有一个Jordan块

$\uparrow$ 简记为J.

$\Leftrightarrow$ 几何重数为1.

令$J=aE_n+N$ $\therefore J^{m}=a^{m}E_n+C_m^{1}N+\cdots+C_m^{m-1}N^{m-1}+N^{m}$

发现几何重数：$n-R(J^{m}-a^{m}E)=1$. 故$(J_n(a))^{m}\simeq J_n(a^{m})$. $\square$

7. 用于证明辛矩阵行列式总为1.

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

- 若$J_i$可写成对称阵乘积$S_iT_i$即可：

$$\therefore A=\underline{P\begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_k \end{bmatrix}P^{T}}\ \underline{(P^{-1})^{T}\begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_k \end{bmatrix}P^{-1}}=ST$$

- 而$J_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 1 & \lambda_1 \\ & ⋰ & ⋰ & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ \lambda_1 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & ⋰ & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}=S_1T_1$ $\square$

8. (1) 由条件知：$d_A(\lambda)=\lambda^2-1$ 从而必然可对角化.

i.e. $A \simeq \begin{pmatrix} -E_r & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix}$

反射矩阵

而 $diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{n-2}\right) \simeq diag(-1, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-1个}) \triangleq \Lambda_1$（第1个为$-1$）.

从而：$P^{-1}AP=\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_r$

i.e. $A=(P\Lambda_1P^{-1})(P\Lambda_2P^{-1})\cdots(P\Lambda_rP^{-1})$

均为反射矩阵.

(2) 可知 $d_A(\lambda)=\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$，在$\mathbb{C}$上可对角化.

并且$A$为实矩阵，从而$i$与$-i$的代数重数相同 ← $\varphi_A(\lambda)=(\lambda+i)^m(\lambda-i)^m$

$\therefore$ $n=2m$为偶，且 $A \simeq \begin{pmatrix} iE_m & \\ & -iE_m \end{pmatrix}$

而 $B=\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$ 满足$B^2=-E_n$，故有：$B \simeq \begin{pmatrix} iE_m & \\ & -iE_m \end{pmatrix}$

从而 $A\simeq_{\mathbb{C}} B$，而相似与数域无关 $\therefore$ $A \simeq_{\mathbb{R}} B$ $\square$

9. (1) $W$是子空间，即 $\forall \alpha,\beta\in W$，$k,m\in\mathbb{C}$，有 $k\alpha+m\beta\in W$.

$\downarrow$

$\exists l_1, l_2 \in \mathbb{N}_+$，$A^{l_1}\alpha=0$，$A^{l_2}\beta=0$.

令$l=l_1+l_2$，必然有 $A^{l_1+l_2}(k\alpha+m\beta)=0$

$\therefore$ $W$是子空间.

(2) $W$实际上是特征值$0$所对应的根子空间.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \begin{matrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{matrix}_{m\times m} & \\ & J' \end{pmatrix}$$ 其中 $J_1\sim J_s$ 为 0 对应 Jordan 块

$J'$ 为非 0 对应 Jordan 块.

由于 $k\geq m$，可知 $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}^m=0$，$(J')^k$ 仍是满秩，为 $n-m$.

$$\therefore\ R(A^k)=R\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}^m+R(J')=n-m.$$ □

10. 假设 $\exists B$ s.t. $B^{n-1}=A$.

而 $A$ 是幂零的 $\rightarrow$ $A$ 和 $B$ 的特征值全为 0.

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$ $J_i$ 均为 0 对应的 Jordan 块.

若 $s\geq 2$，即每一个 Jordan 块都小于 $n$ 阶，此时 $B^{n-1}=0\neq A$.

若 $s=1$，即:

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $R(B^{n-1})=1=R(A)$，但显然 $R(A)\geq 2$.

故而可知，不存在 $B$ s.t. $B^{n-1}=A$. □