高等代数（加）期末讲座

王衡宇　杨磊

2024 年 12 月 22 日

1. 设有理系数多项式 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, 试求首一多项式 $g(x)$ 使得 $g(x)$ 无重因式, 并且与 $f(x)$ 有相同的不可约因式.

2. 设多项式 $f(x) = x^5 + ax - 1$.

(1) 试求 a 的值使多项式 $f(x)$ 有有理根；

(2) 设 $a = 5$, 证明多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；

(3) 设 $a = 5, A$ 是 n 阶方阵且 $f(A) = O$. 证明:对于任意 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 要么 $g(A) = O$, 要么 $g(A)$ 可逆.

3. 设 V 是所有 n 阶实矩阵在通常的加法和数乘运算下构成的实线性空间, 而 W 是由所有 n 阶实对称矩阵构成的 V 的子空间. 取定 n 阶实矩阵, 定义映射 $\mathscr{A}: V \to V$, 其中 $\mathscr{A}(X) = P^{\mathrm{T}}XP$.

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 并且 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间；

(2) 设 $n = 2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 试问 W 上的线性变换 $\mathscr{A}|_W$ 是否可对角化?

4. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 试求 A 的 *Jordan* 标准形 J, 并求出实可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$；

(2) 试求三阶方阵 S, N, 使得 $A = S + N$, 并且 S 可对角化, N 幂零, 并且 $SN = NS$；

(3) 定义 $C(A) = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon AX = XA\}$, 其在通常的矩阵加法和数乘运算下构成一个实线性空间, 试求 $C(A)$ 的维数 $\dim C(A)$.

5. 设 n 阶复方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(\varphi(\lambda), g'(\lambda)) = 1$, 证明 A 可对角化的充要条件是 $g(A)$ 可对角化.

6. 设 A, B 是 n 阶复方阵, 且有 $R(A) = R(B)$, $A^2B = A$, 证明 $B^2A = B$.

7. 设有 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型 $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$, 其中 a 是正实数. 已知 $Q(x)$ 在单位球面 $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 上的最大值和最小值分别为 2 和 -4.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Py$ 将 $Q(x)$ 化为标准形, 其中 $y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$.

8. 设 V 是二阶实矩阵关于通常的矩阵加法和数乘运算构成的实线性空间, 又设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 定义 V 上的二元函数 $(,): V \times V \to \mathbb{R}$, 其中 $(X, Y) = \mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY)$. 定义线性变换 $\mathrm{ad}_A : V \to V$, 其中 $\mathrm{ad}_A(X) = AX - XA$.

(1) 证明 : $(,)$ 是 V 上的内积;

(2) 试求 ad_A 的像空间 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A)$ 相对于该内积的标准正交基.

9. 设有实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, Q, 使得 $PAQ = B$;

(2) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = C$;

(3) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP = D$.

10. 设 $V = \mathbb{R}^n$, 其在标准内积下构成欧氏空间. 取定非零向量 $\alpha \in V$, 定义线性变换 $\sigma_\alpha : V \to V$, 使得任意 $\beta \in V$ 有

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

(1) 证明 : σ_α 是 V 上的正交变换;

(2) 证明 : σ_α 可对角化;

(3) 试求 σ_α 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵, 其中 e_i 是第 i 分量为 1 其余分量均为 0 的单位向量.

11. 设 A, B 均为 n 阶实对称正定阵, 证明

$$\det(A + B) \geq 2^n \sqrt{\det(A)}\sqrt{\det(B)},$$

并且等号成立的充分必要条件是 $A = B$.

12. 设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 证明 $\det(AB^{-1}) = (-1)^{n - R(A+B)}$.

13. 设 A 是实方阵, $A + A^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵, 且 $A \neq A^{\mathrm{T}}$, 证明 $\det(A + A^{\mathrm{T}}) < \det(2A)$.