高等代数（加）期末讲义答案

王衡宇　杨磊

2024 年 12 月 22 日

1. 设有理系数多项式 $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$, 试求首一多项式 $g(x)$ 使得 $g(x)$ 无重因式, 并且与 $f(x)$ 有相同的不可约因式.

解. 直接计算可得 $(f(x), f'(x))=(x-2)^2$, 从而所求 $g(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}=(x-2)(x^2+x+1)$. $\square$

2. 设多项式 $f(x)=x^5+ax-1$.

(1) 试求 a 的值使多项式 $f(x)$ 有有理根；

(2) 设 $a=5$, 证明多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；

(3) 设 $a=5, A$ 是 n 阶方阵且 $f(A)=O$. 证明:对于任意 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 要么 $g(A)=O$, 要么 $g(A)$ 可逆.

(1) **解.** $f(x)$ 的有理根只能是 ±1, 而 $f(1)=a$, $f(-1)=-a-2$, 故 $a=0$ 或 -2 时 $f(x)$ 有有理根. $\square$

(2) **证明.** 此时 $f(x)=x^5+5x-1$, 考虑多项式 $h(x)=f(x+1)$, 取 $p=5$ 由爱森斯坦判别法可知 $h(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 从而 $f(x)$ 不可约. $\square$

(3) **证明.** 由 (2) 可知 $f(x)$ 不可约, 那么对于 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 要么 $f(x)\mid g(x)$, 要么 $(f(x), g(x))=1$. 如果 $f(x)\mid g(x)$, 则存在 $m(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $g(x)=m(x)f(x)$, 从而 $g(A)=m(A)f(A)=O$. 如果 $(f(x), g(x))=1$, 则存在 $u(x), v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 从而 $u(A)f(A)+v(A)g(A)=v(A)g(A)=E$, 即 $g(A)$ 可逆. $\square$

3. 设 V 是所有 n 阶实矩阵在通常的加法和数乘运算下构成的实线性空间, 而 W 是由所有 n 阶实对称矩阵构成的 V 的子空间. 取定 n 阶实矩阵, 定义映射 $\mathscr{A}: V\to V$, 其中 $\mathscr{A}(X)=P^{\mathrm{T}}XP$.

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 并且 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间；

(2) 设 $n=2$, $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, 试问 W 上的线性变换 $\mathscr{A}|_W$ 是否可对角化？

(1) **证明.** 由 $\mathscr{A}(aX+bY)=P^{\mathrm{T}}(aX+bY)P=aP^{\mathrm{T}}XP+bP^{\mathrm{T}}YP=a\mathscr{A}(X)+b\mathscr{A}(Y)$ 对任意 $X,Y\in V$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$ 均成立, 可知 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换.

设 $X\in W$, 则 $(\mathscr{A}(X))^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}XP)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}P=P^{\mathrm{T}}XP$, 即 $\mathscr{A}(X)\in W$, 从而知 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. □

(2) **解.** 取 W 的一组基 $E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22}$, 则 $\mathscr{A}\mid_W$ 在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&4\\4&-4&1\end{pmatrix}$. 容易看出 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$, 且 $(A-E)(A+E)=O$, 从而 A 可对角化, 即 $\mathscr{A}|_W$ 可对角化. □

4. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-4\\1&3&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

(1) 试求 A 的 Jordan 标准形 J, 并求出实可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$;

(2) 试求三阶方阵 S,N, 使得 $A=S+N$, 并且 S 可对角化, N 幂零, 并且 $SN=NS$;

(3) 定义 $C(A)=\{X\in\mathbb{R}^{3\times 3}\colon AX=XA\}$, 其在通常的矩阵加法和数乘运算下构成一个实线性空间, 试求 $C(A)$ 的维数 $\dim C(A)$.

解. (1) 由于 $\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 并且 $(A-E)(A-2E)\neq O$ 可知最小多项式 $d_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 以及 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$.

解方程 $(A-E)x=0$ 得到特征向量 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 解方程 $(A-2E)x=0$ 得到特征向量 $\alpha_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, 解 $(A-2E)x=\alpha_2$ 得到向量 $\alpha_3=(0,1,0)$, 于是可取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

(2) 由于 $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=:\widetilde{S}+\widetilde{N}$, 于是所求矩阵即为 $S=P\widetilde{S}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$, $N=P\widetilde{N}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(3) 由于 $C(A) \simeq C(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, 从而 $\dim C(A) = 3$. $\square$

5. 设 n 阶复方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(\varphi(\lambda), g'(\lambda)) = 1$, 证明 A 可对角化的充要条件是 $g(A)$ 可对角化.

证明. 必要性显然, 下面证明充分性. 容易看出只需考虑 A 的 Jordan 标准形. 设 A 不可对角化, 那么 A 有一个特征值为 λ 的 r_1 阶 Jordan 块 J, 其中 $r_1 > 1$. 则有

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & & & \\ g'(\lambda) & g(\lambda) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & g'(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix},$$

由于 $(\varphi(x), g'(x)) = 1$, 可知 λ 不是 $g'(x)$ 的根, 那么 $g(J)$ 成为 $g(A)$ 的一个 r_1 阶 Jordan 块, 从而 $g(A)$ 不可对角化. $\square$

6. 设 A, B 是 n 阶复方阵, 且有 $R(A) = R(B)$, $A^2B = A$, 证明 $B^2A = B$.

证明. 不妨 A 不可逆, 否则结论显然成立. 容易看出可取 A 为 Jordan 标准形. 由于 $R(A) \geq R(A^2) \geq R(A^2B) = R(A)$ 可知 $R(A^2) = R(A)$, 于是知 A 的特征值 0 对应的 Jordan 块是一阶的, 进而可设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & O \end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 n_1 阶可逆矩阵, $n_1 < n$. 将 B 相应分块为 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 带入条件 $A^2B = A$ 计算可得 $A_1^2B_1 = A_1$, $A_1B_2 = O$, 于是有 $B_1 = A_1^{-1}$, $B_2 = O$, 从而得到 $R(B) \geq R(B_1) + R(B_4) = R(A) = R(A_1) = R(B_1)$, 即 $R(B_4) = 0$, 故

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ B_3 & O \end{pmatrix},$$

此时即可得到 $B^2A = B$. $\square$

7. 设有 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型 $Q(x)=x_1^2+x_2^2-3x_3^2+2ax_1x_3+2x_2x_3$, 其中 a 是正实数. 已知 $Q(x)$ 在单位球面 $S=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ 上的最大值和最小值分别为 2 和 -4.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $x=Py$ 将 $Q(x)$ 化为标准形, 其中 $y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$.

解. (1) 记二次型 $Q(X)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&1\\a&1&-3\end{pmatrix}$, 则 $Q(X)$ 在单位球面上的最值是 A 的最大最小特征值, 而 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda-a^2-4)$, 从而得到 $-a^2-4=-8$, 又 $a>0$, 于是 $a=2$.

(2) 只需将 A 正交对角化. 由 $(A-E)x=0$ 可得特征向量 $p_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 由 $(A-2E)x=0$ 可得特征向量 $p_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, 由 $(A+4E)x=0$ 可得特征向量 $p_3=(2,1,-5)$, 分别单位化, 即得所求的

$$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{30}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{30}}{30}\\0&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{30}}{6}\end{pmatrix}.$$

□

8. 设 V 是二阶实矩阵关于通常的矩阵加法和数乘运算构成的实线性空间, 又设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. 定义 V 上的二元函数 $(,):V\times V\to\mathbb{R}$, 其中 $(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY)$. 定义线性变换 $\mathrm{ad}_A:V\to V$, 其中 $\mathrm{ad}_A(X)=AX-XA$.

(1) 证明 : $(,)$ 是 V 上的内积;

(2) 试求 ad_A 的像空间 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A)$ 相对于该内积的标准正交基.

(1) **证明.** 第一分量线性: $(aX+bY,Z)=\mathrm{Tr}\left((aX+bY)^{\mathrm{T}}AZ\right)=a\,\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AZ)+b\,\mathrm{Tr}(Y^{\mathrm{T}}AZ)$.

对称性: $(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY)=\mathrm{Tr}\left(\left(X^{\mathrm{T}}AY\right)^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{Tr}(Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X)=\mathrm{Tr}(Y^{\mathrm{T}}AX)=(Y,X)$.

正定性:由于 A 是正定的, 存在可逆矩阵 P 使得 $X=P^{\mathrm{T}}P$, 则对 $X\in V$ 有 $(X,X)=\mathrm{Tr}\left((PX)^{\mathrm{T}}(PX)\right)\geq 0$, 并且当且仅当 $X=O$ 时取等号. □

(2) **解.** 首先来求 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A)$ 的一组基. 取 V 的自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$, 则有

$$\mathrm{ad}_A(E_{11})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=B_1,\ \mathrm{ad}_A(E_{12})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=B_2,$$

且计算可得 $\mathrm{ad}_A(E_{21}) = -B_1 - B_2$, $\mathrm{ad}_A(E_{22}) = -B_1$, 于是知 B_1, B_2 是求 $\Im(\mathrm{ad}_A)$ 的一组基.

下面作正交化, 取 $M_1 = B_1$, $M_2 = B_2 - \dfrac{(B_2, M_1)}{(M_1, M_1)} M_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. 进一步单位化可得标准正交基 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. □

9. 设有实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, Q, 使得 $PAQ = B$;

(2) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = C$;

(3) 当 a 为何值时, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP = D$.

解. (1) 只需求出 a 的值使得 $R(A) = R(B) = 2$, 由于 A 有 2 阶非零子式, 于是只需 $\det(A) = 0$, 由此解得 $a = 2$.

(2) C 的特征多项式为 $\varphi_C(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+1)$. 欲使 A 与 C 相似, 需要 $\mathrm{Tr}(A) = a+2 = \mathrm{Tr}(C) = 2$, 即 $a = 0$. 而 $a = 0$ 时有 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+1)$, 从而 A, C 均相似于 $\mathrm{diag}(1, -1, -2)$.

(3) 由于二次型 $x^T Ax = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (a-2)x_2^2, x^T Dx = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1+x_2-x_3)^2 - 3(x_2-x_3)^2 + 2x_3^2$, 由于正负惯性指数是合同关系的全系不变量, 因此 $a < 2$ 符合题意. □

10. 设 $V = \mathbb{R}^n$, 其在标准内积下构成欧氏空间. 取定非零向量 $\alpha \in V$, 定义线性变换 $\sigma_\alpha : V \to V$, 使得任意 $\beta \in V$ 有

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

(1) 证明 : σ_α 是 V 上的正交变换;

(2) 证明 : σ_α 可对角化;

(3) 试求 σ_α 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵, 其中 e_i 是第 i 分量为 1 其余分量均为 0 的单位向量.

(1) **证明.** 由于 $\|\sigma_\alpha(\beta)\| = (\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta)) = (\beta, \beta) = \|\beta\|$ 可知 σ_α 保长度, 那么自然是正交变换. □

(2) **证明.** 将 α 扩为 V 的正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha$, 则 σ_α 在这一组基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$. □

(3) **解.** 记 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 则有 $\sigma_\alpha(e_i) = e_i - 2\dfrac{\alpha}{(\alpha, \alpha)} a_i$, 则有

$$(\sigma_\alpha(e_1), \cdots, \sigma_\alpha(e_n)) = (e_1, \cdots, e_n)\left(E_n - 2\frac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{(\alpha, \alpha)}\right),$$

即 σ_α 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 $E_n - 2\dfrac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{(\alpha, \alpha)}$. □

注 0.1. 取 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 记 $\widetilde{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$, 则 $\sigma_\alpha(x) = x - 2(\beta, \widetilde{\alpha})\widetilde{\alpha} = x - 2\widetilde{\alpha}(\widetilde{\alpha}^{\mathrm{T}} x) = \left(E_n - 2\dfrac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{(\alpha, \alpha)}\right) x$.

11. 设 A, B 均为 n 阶实对称正定阵, 证明

$$\det(A + B) \geq 2^n \sqrt{\det(A)}\sqrt{\det(B)},$$

并且等号成立的充分必要条件是 $A = B$.

证明. 容易看出待证式在合同变换下不变, 并且不改变正定性条件, 于是可取 A 为合同标准形 E_n, 即证 $\det(E_n + B) \geq 2^n \sqrt{\det(B)}$.

由于 B 正定, 存在正交阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}} B P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$, 于是有

$$\det(A + B) = \det(E_n + P^{\mathrm{T}} B P) = (1 + \lambda_1) \cdots (1 + \lambda_n) \geq 2^n \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 2^n \sqrt{\det(B)},$$

并且等号成立当且仅当 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n = 1$, 此时 $B = E_n = A$. □

12. 设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 证明 $\det(AB^{-1}) = (-1)^{n - R(A+B)}$.

证明.

$$\det(AB^{-1}) = (-1)^{n - R(AB^{-1} + E)} = (-1)^{n - R(A+B)}.$$ □

13. 设 A 是实方阵, $A + A^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵, 且 $A \neq A^{\mathrm{T}}$, 证明 $\det(A + A^{\mathrm{T}}) < \det(2A)$.

证明. 记 $M = A + A^{\mathrm{T}}$, $N = A - A^{\mathrm{T}}$, 则 M 是正定对称阵, 而 N 是反对称阵. 于是只需证明 $\det(M) < \det(M + N)$. 容易看出待证式在合同变换下不变, 于是不妨取 $M = E_n$, 只需证 $\det(E_n + N) > 1$.

由于 N 反对称, 存在正交阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}NP = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} & -b_1 \\ b_1 & \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} & -b_s \\ b_s & \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right),$$

其中 $s > 1$, 则有

$$\det(E_n + N) = (1 + b_1^2) \cdots (1 + b_s^2) > 1. \qquad \square$$