“数学外卖”高等代数组第十一次讲座

王衡宇　田嘉轩

2024年12月20日

1. 在有理数域上因式分解$x^{15}-1$

2. 证明：(1)$A=\left\{a\sqrt[3]{9}+b\sqrt[3]{3}+c|a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$是数域
   (2)$\forall f(x)\in\mathbb{F}[n]$若$f(\sqrt[3]{3})=0$则$x^3-3|f(x)$

3. 证明：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

4. 求实数t使得$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重因式

5. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z+w=10 \\ x^2+y^2+z^2+w^2=30 \\ x^3+y^3+z^3+w^3=100 \\ xyzw=24 \end{cases}$$

6. 设$A\in\mathbb{F}^n$且$A^2=A$，证明：存在n阶可逆方阵P使得
   $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

7. 设n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$求$|A|$的所有代数余子式之和

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是非齐次线性方程组$AX=\beta$的4个解，且

$$(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,3\alpha_3+2\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   求$AX=\beta$线性方程组的通解

9. 设$A\in\mathbb{F}^{3\times 2},B\in\mathbb{F}^{2\times 3}$且$AB=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$求$R(A),R(B)$和$BA$

10. 计算

$$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_n)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$$

(2)若将行列式中各元素的次数改为$k(1 \le k \le n-1)$则又有什么结果

11. 求下述线性空间V的维数和一组基

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

V为矩阵A的全体实系数多项式组成的实线性空间

12. 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$是$n$维线性空间的一组基，$A \in \mathbb{F}^{n \times m}$,由$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A$得到向量$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 令$W = Span(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$证明：$dimW = R(A)$