高代 线性方程组和线性空间

田嘉轩　戴云舒

2024 年 12 月 14 日

PART I. 线性方程组

例题 1 设有 $\mathbb{F}$ 中的向量组 $S:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s, T:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$, 则:

(1) $T\leftarrow S$, 且 $t>s\Rightarrow T$ 线性相关.

(2) $T\leftarrow S$, 且 T 线性相关 $\Rightarrow t\le s$.

(3) $S\Leftrightarrow T$, 且 S 与 T 均线性无关 $\Rightarrow s=t$.

例题 2 *(Steinitz 替换定理)* 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性无关的, 且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出.

证明: 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 替换 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中的 r 个向量 (不妨是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$), 使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$ 和向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 等价.

例题 3 证明: 任意一个秩为 r 的矩阵可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

例题 4 设 A 为 $m\times n$ 的实矩阵. 证明: 存在 $n\times m$ 的实矩阵 B 使得:

(1) $ABA=A$.

(2) $BAB=B$.

(3) $(AB)^T=AB$.

(4) $(BA)^T=BA$.

例题 5 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}, n\ge 2$, 证明:

(1) 有

$$R(adj(A))=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

(2) 有

$$adj(adj(A))=\begin{cases} A & n=2 \\ |A|^{n-2}A & n>2 \end{cases}$$

例题 6 *(1)* 证明:$R(AA^*)=R(A^*A)=R(A)$, 其中 $A^*=\bar{A}^T$.

特别地, 当 A 是实矩阵时, 有 $R(AA^T)=R(A^TA)=R(A)$.

(2) 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明: 对任意的 $\beta\in\mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A^*A\beta=A^*\beta$ 一定有解.

例题 7 设 A 为 n 阶方阵,$n \geq 2$, 如果 A 每行之和, 每列之和都是 0, 证明:A 的伴随矩阵所有位置的元素都相同.

例题 8 设 $\alpha_1 = (0,1,1)^T, \alpha_2 = (1,1,0)^T, \beta_1 = (-1,0,1)^T, \beta_2 = (1,2,1)^T, \beta_3 = (3,2,-1)^T$.

证明:α_1, α_2 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价.

例题 9 设 $\alpha_1 = (1,0,2,1)^T, \alpha_2 = (1,2,0,1)^T, \alpha_3 = (2,1,3,0)^T, \alpha_4 = (2,5,-1,4)^T, \alpha_5 = (1,-1,3,-1)^T, \beta = (1,4,-2,1)^T$.

(1) 求向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5)$ 的秩和极大无关组.

(2) 用极大无关组表示其余向量.

(3) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5)$, 求 $AX = \beta$ 的通解.

(4) 计算 A 的满秩分解.

PART II. 线性空间

例题 10 判断下列集合是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间:

(1) V 为次数等于 $n(n > 1)$ 的实系数多项式全体, 加法和数乘就是多项式的加法和数乘.

(2) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, 数乘就是矩阵的数乘, 加法 *oplus* 定义为 $A \oplus B = AB - BA$, 其中等式右边是矩阵的乘法和减法.

(3) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, 数乘就是矩阵的数乘, 加法 *oplus* 定义为 $A \oplus B = AB + BA$, 其中等式右边是矩阵的乘法和加法.

(4) $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, 加法和数乘就是矩阵的加法和数乘.

(5) V 为正实数全体 $\mathbb{R}^+$, 加法 $\oplus$ 定义为 $a \oplus b = ab$, 数乘 $\circ$ 定义为 $k \circ a = a^k$, 其中等式右边分别是数的加法和乘法.

(6) V 为实数对全体 $\{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$, 加法 $\oplus$ 定义为 $(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1a_2)$, 数乘 $\circ$ 定义为 $k \circ (a,b) = (ka, kb + \dfrac{k(k-1)}{2}a^2)$, 其中等式右边分别是数的加法和乘法.

例题 11 求下列线性空间 V 的维数:

(1) V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶上三角矩阵全体组成的线性空间.

(2) V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对称矩阵全体组成的线性空间.

(3) V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵全体组成的线性空间.

例题 12 证明: 数域 $\mathbb{F}$ 上维数 $dim(V) \geq 1$ 的线性空间 V(即 $V \neq \{0\}$), 它不能被它的有限个真子空间所覆盖.

即设 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 是 V 的真子空间, 则存在 $\alpha \in V$, 使得 $\alpha \notin W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$.

例题 13 设 V 是由数域 $\mathbb{F}$ 上次数小于 n 的多项式全体构成的线性空间,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{F}$ 中互不相同的 n 个数,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$,$f_i(x)=f(x)/(x-a_i)$.

求证:$\{f_i(x)(1\leq i\leq n)\}$ 组成了 V 的一组基.

例题 14 把实数域 $\mathbb{R}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

证明*:* 对于任意大于 1 的正整数 n, 以下元素是线性无关的*:*

$$1, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{3^2}, \cdots, \sqrt[n]{3^{n-1}}$$

并且证明 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 的线性空间是无限维的.

例题 15 设 V 是所有连续实函数构成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 证明*:*

(1) 向量 $\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$ 线性无关.

(2) 向量 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$ 线性无关.

(3) 向量 $1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots$ 线性无关.

例题 16 设 $\alpha_1=(1,2,-1,-2)^T,\alpha_2=(3,1,1,1)^T,\alpha_3=(-1,0,1,-1)^T,\beta_1=(2,5,-6,-5)^T,\beta_2=(-1,2,-7,3)^T$, 而 $W_1=Span(\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}),W_2=Span(\{\beta_1,\beta_2\})$, 求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的维数和一组基.

例题 17 设有多项式*:*

$$\begin{aligned} &f_1(x)=x^3+x^2+x+1 \qquad f_2(x)=x^3+x+2 \qquad f_3(x)=2x^3+x^2-2 \\ &g_1(x)=2x^3+2x^2-3 \quad g_2(x)=2x^3+x^2+2x+3 \quad g_3(x)=x^3+x^2-3x-9 \end{aligned}$$

令 $V=Span(\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\})\subset\mathbb{F}_3[x]$, 证明:$\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$ 和 $\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$ 都是 V 的基, 并且求出从 $\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$ 到 $\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$ 的过渡矩阵.

例题 18 设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 都是数域, 且 $\mathbb{F}\subset\mathbb{K}$, 将 $\mathbb{K}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的维数记为 $[\mathbb{K}:\mathbb{F}]$. 设 $\mathbb{E}$ 也是数域, 且 $\mathbb{K}\subset\mathbb{E}$.

证明*:* 如果 $[\mathbb{E}:\mathbb{K}]<\infty$ 且 $[\mathbb{K}:\mathbb{F}]<\infty$, 那么 $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]=[\mathbb{E}:\mathbb{K}][\mathbb{K}:\mathbb{F}]$.