知识点：

基一定存在

线性空间 & 子空间

只需验证 $k\alpha+l\beta$ 的封闭性即可.

$A\cap B$，$A+B$ TKS 是子空间，但 $A\cup B$ 不是.

维数公式：

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim A\cap B$$

两组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ & $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

$$= y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n$$

基　　　基　　可逆

$$\underset{1\times n}{(\beta_1, \cdots, \beta_n)} = \underset{1\times n}{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)} P_{n\times n}$$

注意：$\beta_1 = P_{11}\alpha_1 + P_{12}\alpha_2 + \cdots + P_{1n}\alpha_n$

$\vdots$

$\beta_n = P_{n1}\alpha_1 + P_{n2}\alpha_2 + \cdots + P_{nn}\alpha_n$

← 基变换

$$\therefore\ x = y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n$$

$$= \boxed{\underset{=x_1}{(y_1P_{11} + y_2P_{21} + \cdots + y_nP_{n1})}}\alpha_1 + \cdots + \boxed{\underset{=x_n}{(y_1P_{1n} + y_2P_{2n} + \cdots + y_nP_{nn})}}\alpha_n$$

↑ 坐标变换

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

直和：① $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

② 0的分解唯一

③ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

④ B_1, B_2 为基，有 $B_1 \cap B_2 = \phi$ & $B_1 \cup B_2$ 为 $W_1 + W_2$ 的基.

⑤ $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

1. (1) 不是: $0 \notin V$

(2) 不是: $A \oplus B \neq B \oplus A$

(3) 不是: $A \oplus (B \oplus C) \neq (A \oplus B) \oplus C$

(4) 是: 8条逐条验证即可.

(5) 是: 逐条验证即可.

(6) 是: 逐条验证即可.

□

2. (1) $\{E_{ij}\ (1 \le i \le j \le n)\}$ 是一组基. $\therefore \dim V = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\{E_{ii}\ (1 \le i \le n),\ E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le n)\}$ 是一组基.

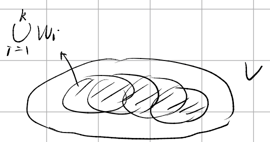
$$\therefore \dim V = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) $\{E_{ij} - E_{ji}\ (1 \le i < j \le n)\}$ 是一组基.

$$\therefore \dim V = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

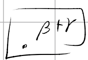
3. 归纳法(对k):



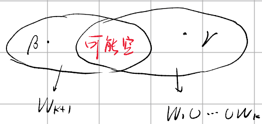
显然: $V \nsubseteq W_1$

假设对任意k个子空间: $V \nsubseteq W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$, 考虑 $k+1$.

① 如果 $W_{k+1} \subseteq W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$ 则结论已经成立.



② 如果 $W_{k+1} \nsubseteq W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$.



$\therefore \exists \beta \in W_{k+1} - W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$

不妨考虑 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k \notin W_{k+1}$

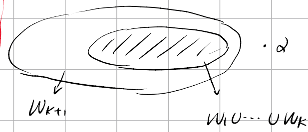
则 $\exists\ \gamma \in W_1 \cup \cdots \cup W_k - W_{k+1}$

令 $\alpha = \beta + \gamma$，则其不属于 $W_1 \cup \cdots \cup W_{k+1}$.

i. 若 $\alpha \in W_{k+1} \rightarrow \beta + \gamma \in W_{k+1}$

$\rightarrow \gamma \in W_{k+1}$ ×

ii. 若 $\alpha \in W_1 \cup \cdots \cup W_k \rightarrow \beta \in W_1 \cup \cdots \cup W_k$ ×



如果 $W_1 \cup \cdots \cup W_k \subseteq W_{k+1}$

必然 $\exists\ \alpha \notin W_1 \cup \cdots \cup W_{k+1}$

($\because \dim W_{k+1} < \dim V$).

因此归纳完毕.

□.

4. 可知 $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ 是 V 的一组基，即 $\dim V = n$.

要证 $\{f_i(x)\ (1 \le i \le n)\}$ 为一组基，故只需证其线性无关.(数量已经 $= \dim V$).

$\therefore$ 设 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$.

令 $x = a_i\ (1 \le i \le n)$ 即得：$k_i \cdot f_i(a_i) = 0 \rightarrow k_i = 0$

$\therefore$ 线性无关. □

5. 假设相关，则存在不全为 0 的有理数 a_i：

$$a_0 + a_1 \sqrt[n]{3} + a_2 \sqrt[n]{3^2} + \cdots + a_{n-1} \sqrt[n]{3^{n-1}} = 0$$

$\therefore$ 记 $f(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$. 故 $f(\sqrt[n]{3}) = 0$.

而 $\sqrt[n]{3}$ 的极小多项式(不可约的零化多项式)为 $x^n - 3 = 0$

(Eisenstein 判别不可约)

则 $x^n - 3 \mid f(x)$ 矛盾(次数)

故线性无关. □

6. 以(3)为例:

假设相关，则:

$$a_0 + b_1\sin x + a_1\cos x + b_2\sin 2x + a_2\sin 2x + \cdots + b_n\sin nx + a_n\cos nx + \cdots = 0.$$

然后乘以 $\sin kx$ 或者 $\cos kx$ 后，在$[0,2\pi]$上积分即得 b_k 或 a_k 为0.

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} a_0\sin kx\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_1\sin x\sin kx\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} a_1\cos x\sin kx\,dx}_{=0} + \cdots + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_k\sin^2 kx\,dx}_{\neq 0}$$

$$+ \underbrace{\int_0^{2\pi} a_k\cos kx\sin kx\,dx}_{=0} + \cdots = 0.$$

i.e. $\quad \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 kx\,dx\right)}_{\neq 0} b_k = 0 \quad \to \quad b_k = 0.$

从而 $\quad a_0,\ a_i.b_i = 0 \quad (\forall i \geq 1)$ □

7. $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ \dim(W_1+W_2) = 4 \qquad$ 基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2\}$. $\quad \dim W_1\cap W_2 = 1.$

从而 $\exists\, c_1, c_2, c_3, c_4$ s.t. $\quad \beta_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\beta_2.$

找一个即在 W_1 又在 W_2 的向量即可.

从而 $\beta_1 - c_4\beta_2 \in W_1\cap W_2 \quad$ 基为 $\{\beta_1 - c_4\beta_2\}$.

□

8. $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = (1, x, x^2, x^3)\, P_{4\times 3}$

$(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = (1, x, x^2, x^3)\, Q_{4\times 3}$.

可知 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 自然是 V 的基，要说明 $\{g_1, g_2, g_3\}$ 也是基

线性无关 $\Updownarrow$

过渡方阵 X 是满秩的.

过渡阵：$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3)X$

i.e. $(1, x, x, x^3)Q = (1, x, x, x^3)PX$

i.e. $Q = PX$.（可求出 X，矩阵方程 $A\underset{\sim}{X} = B$）□

9. 设 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的一组基为：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \qquad m = [\mathbb{K} : \mathbb{F}]$.

以及 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{K}$ 上的基为：

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \qquad n = [\mathbb{E} : \mathbb{K}]$

尝试证明：

$\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_1\beta_n, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2, \cdots, \alpha_m\beta_n$ （mn 个）

是 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的基. $\mathbb{E} = \mathrm{Span}(\{\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_m\beta_n\})$，只需证线性无关性.

$k_{11}\alpha_1\beta_1 + k_{12}\alpha_1\beta_2 + \cdots + k_{nn}\alpha_n\beta_n = 0$

i.e. $(k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{n1}\alpha_n)\underline{\beta_1} + \cdots + (k_{1n}\alpha_1 + k_{2n}\alpha_2 + \cdots + k_{nn}\alpha_n)\underline{\beta_n} = 0$

无关

$\therefore \quad k_{1j}\alpha_1 + k_{2j}\alpha_2 + \cdots + k_{nj}\alpha_n = 0 \quad (\forall j)$

$k_{ij} = 0 \ (\forall i, j)$ □