第九周

1. $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n$

$n=1$ 时

原式 $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

$n=2$ 时

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\cos2\varphi & -\sin2\varphi\\ \sin2\varphi & \cos2\varphi\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法.

令 $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}$

∴ $n=k+1$ 时

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi\\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi\end{pmatrix}$$

∴ 可知

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$$

2. 证明:

令AB的第i行元素均为0

若A的第i行元素不全为0

设 $a_{ij}\neq 0$.

又∵ A, B的元素都为非负实数

∴ B的~~第j~~列的第1个元素均为0.

∴ B有全零行

3. $$\begin{pmatrix}0 & E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & B\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$$

4. (a): $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(b) $P_2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(c) $P_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

∴ $P = P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

5. $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

① $\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}$ ② $\xrightarrow{r_3-2r_1}$ ③ $\xrightarrow{r_1-r_2}\xrightarrow{r_3+3r_2}$ ④ $\xrightarrow{r_1+r_3}\xrightarrow{r_2+r_3}$ ⑤ $\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{2})}$

∴ $A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

6. 证明:

∵ $A+B=AB$

$B+A=BA$

∴ $AB=BA$.

$(I_n-A)(I_n-B)$

$=I_n-A-B+AB$

$=I_n$

∴ (I_n-A) 可逆.

7. 证明

令 X s.t.

$(E_m-BA)(E_m+X)=E$

∴ $X-BAX-BA=0$

$(E-BA)X=BA$

令 $X=BYA$

∴ $BYA-BABYA=BA$

∴ $B(Y-ABY)A=BA$

∴ $Y-ABY=E$

∴ $(E_n-AB)Y=E$

∴ $Y=(E_n-AB)^{-1}$

∴ E_m-BA 可逆

且其逆为

$B(E_n-AB)^{-1}A$

8. 证明:

为证原式,

只需证

$$1=(A+\alpha\beta^T)A^{-1}-\frac{(A+\alpha\beta^T)}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}$$

右 $=1+\alpha\beta^TA^{-1}$

$$-\frac{\alpha\beta^TA^{-1}+\alpha\beta^TA^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$$

$$=1+\alpha\beta^TA^{-1}-\frac{\alpha\beta^TA^{-1}(1+\beta^TA^{-1}\alpha)}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$$

$=1+\alpha\beta^TA^{-1}-\alpha\beta^TA^{-1}$

$=1=$ 左 得证.