§ 数学外卖高等代数讲座

郝昱翔、吴佳骏

2024 年 11 月 2 日

1 矩阵的初等变换与线性方程组

1. **矩阵与线性方程组**之间有着妙不可言的联系. 解一个线性方程组可以转化成去解方程

$$AX = \beta$$

   其中 A 代表系数矩阵，X 是未知元向量，β 代表常数项列向量.

2. 一定可以用初等变换，把任何一个矩阵 A 变成 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的形状，这种形状被称为 A 的**等价标准形**，把其中 I_r 的阶数定义为矩阵 A 的秩.

3. 以上操作基本上可以推广到分块矩阵.

4. 设 A 为 n 阶方阵且 $|A| = 0$. 考察非齐次线性方程组 $AX = \beta$, 其中 β 是 n 维向量. 记 D_j 是将 $|A|$ 中第 j 列替换为 β 后得到的行列式，且 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 中至少有一个不等于 0，证明该方程组无解.

2 线性相关性与矩阵的秩

1. 证明:对 n 阶矩阵 A 及向量 α, 若存在正整数 k 使得 $A^k\alpha = 0$ 但 $A^{k-1}\alpha \neq 0$, 则向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

2. (Frobenius 不等式) 设 $A_{m\times n}, B_{n\times t}, C_{t\times s}$，则

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

3. (Sylvester 不等式) 设 $A_{m\times n}, C_{n\times s}$，则

$$r(AB) \geq r(A) + r(C) - n$$

3 模

下设 R 是含幺交换环. 实际上交换代数中以及很多时候我们都只考虑这种环 (或者更强一些)

定义 3.1. *环 R 上的左模是一个阿贝尔群 $(M, +)$ 上带有标量积 $R \times M \to M$:*
(1)$1x = 1$(2)$a(bx) = (ab)x$(3)$(a + b)x = ax + bx$(4)$a(x + y) = ax + ay$.

不太严谨地说，R 模几乎就是 k 线性空间，只是左面不能除以标量 (我们将看到，这会使得模的结构很复杂，尽管在主理想整环上不会特别复杂).

定义 3.2 (子模). 设 M 为 R 模，N 是 R 的子集，使得 N 关于加法构成封闭集合且 $ax \in N, \forall a \in R, x \in N$.

例 3.1. *(1) 设 k 是一个一般域，那么 k 模就是 k 线性空间. 注意在考虑 $\mathbb{F}_{p^2}$ 的时候，不能简单考虑 $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^2}$.*

(2)$\mathbb{Z}$ 模 =Abelian group.

(3)R 环.R 是一个 R 模，R 作为 R 模的子模是 R 的理想. 设 $I \lhd R, R/I$ 是 R 模. 例如 $k[x]$ 是域上多项式环，它本身是 k 模；同时 $k = k[x]/(x)$ 是 $k[x]$ 模.

(4) 有限自由 R 模：$R^n = \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in R\}$, 称其秩 (rank) 为 n.

(5) 当 k 是一个域，$k[x]-$ 模 $\longleftrightarrow$ 带有线性变换 $T: M \to M$ 的 k 线性空间. 其实很简单，左面往右面的话；右面往左面，只要把多项式中的 x 替换成 $T(m)(m \in M)$ 即可

类比有限维线性空间 (其生成集，即基底是有限的)，我们定义有限生成模.

定义 3.3. *一个 R 模称为有限生成的 (finite-generated), 如果存在整数 $n(< \infty)$ 以及 $x_1, \cdots, x_n \in M$, 使得任取 $m \in M, \exists a_1, \cdots, a_n \in R$, 使得*

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

其实就是 (有限) 线性生成性的很好的类比. 下面的例子将展示它们的不同.

例 3.2. *(1) 取 $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}$, 如果要生成它必须把 $[1]$ 取出来. 然而存在 R 中的元素 2 使得 $2 \cdot [1] = [0] (\in M)$. 换句话说它是个***扭元** *(一个非零元素 $a \in M$, 却能找到一个非零系数 $r \in R$, 它们乘起来是 0).*

(2) 取 $R = k[x, y], M = k[xy]$.M 作为 R 模由 1 生成. 取子模 $M' = (x, y)$(由 x, y 在环 R 中生成的理想), 该子模却不能由一个元素生成. 更一般地，可能出现有限生成模的子模需要无穷多个元素生成. 如果一个模的全部子模 (也包括它自己) 都是有限生成的，称作 Noether 模.

命题 3.1. *有限生成模的等价描述是，$\exists n, s.t., R^n \to M$ 满射，$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)$.*

这个描述的好处是，利用同态基本定理得到 $R^n / \mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi = M$.

定义 3.4 (rank). *$Rank(M)$ 定义成极大 $R-$ 线性无关组的元素个数.*

定义 3.5 (自由模). *一个秩为 n 模 M 是自由的，如果 $\exists x_1, \cdots, x_n$, 使得 $\forall x \in M, \exists! a_1, \cdots, a_n \in R, s.t., x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. 也就是说，自由模就是有***基** *(线性无关生成组) 的模.*

定理 3.2 (主理想整环上的“循环分解”). *R 是 PID, M 是秩为 n 的自由模，$N \subseteq M$ 子模，则*
(1)N 是自由模，且其秩 $rank(N) \le rank(M)$.
(2)$\exists M$ 的基 $y_1, \cdots, y_n$, 使得 N 的基是 $a_1 y_1, \cdots, a_m y_m$, 其中 $a_i \in R, a_1 | a_2 | \cdots | a_m$.

4 矩阵的综合问题

1. 计算矩阵 $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$

2. 设 n 阶方阵 A, B 的元素都是非负实数. 证明：如果 AB 有全零行，则 A 或 B 有全零行.

3. 设 A, B 都是 n 阶方阵，计算

$$\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{bmatrix}$$

4. 设 A 是 $3\times n$ 矩阵，求矩阵 P, 使得 P 左乘 A 相当于对 A 进行如下的行初等变换：

   (a) 交换第 2,3 行.

   (b) 第 2 行的-2 倍加到第 1 行.

   (c) 第 3 行乘 -3.

5. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ 的逆.

6. 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $A+B=AB$. 求证：I_n-A 是可逆矩阵且 $AB=BA$.

7. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，如果 E_n-AB 可逆，证明 E_m-BA 也可逆，并求其逆.

8. 设 A 是 n 阶可逆阵，α,β 是 n 维列向量且 $1+\beta^TA^{-1}\alpha\neq 0$. 求证：

$$(A+\alpha\beta^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}$$

9. 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A,B 皆为整矩阵.

   (a) 证明以下两条等价：(1)A 可逆且 A^{-1} 是整矩阵.(2)A 的行列式的绝对值是 1.

   (b) 若已知 $A,A-2B,A-4B,\cdots,A-2nB,A-2(n+1)B,A-(n+2)B$ 均可逆，且逆矩阵为整矩阵，证明：$A+B$ 可逆.