2.14

(1) 若 $|A|\neq 0$. 则由 $A\cdot \mathrm{adj}(A) = |A|E$ 有

$$|A|\cdot|\mathrm{adj}(A)| = |A|^n \Rightarrow |\mathrm{adj}(A)| = A^{n-1}$$

若 $|A|=0$, 注意到 $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = A$, 若 $|\mathrm{adj}(A)|\neq 0$. 则 $\mathrm{adj}(A)$ 可逆,
进而 A 可逆 $\Rightarrow |A|\neq 0$ 矛盾! 因此 $|\mathrm{adj}(A)|=0$, 等式成立。

(2). 注意到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & |A| & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & |A| \end{pmatrix}$$

取行列式 $$|A|\begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-1}$$

即 $$\begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-2}.$$

15. 由于

$$\begin{pmatrix} E_n & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -\alpha \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+\alpha\beta^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$$ 故在 $|A|\neq 0$ 时又有

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -\frac{\beta^T \mathrm{adj}(A)}{|A|} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -\alpha \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\alpha \\ 0 & 1+\frac{\beta^T \mathrm{adj}(A)\alpha}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+\alpha\beta^T| = |A| + \beta^T \mathrm{adj}(A)\alpha.$$

在$|A|=0$时 采用摄动法考虑一个邻域 $(-\delta,\delta)$ 其中 $A+\varepsilon E_n$ 可逆 $(\forall \varepsilon\in(-\delta,\delta))$

则有 $|A+\varepsilon E_n+\alpha\beta^T| = |A+\varepsilon E_n| + \beta^T \operatorname{adj}(A+\varepsilon E_n)\alpha$

$\varepsilon\to 0$ 也有结论成立

16. (1) 考虑

$$F(x)=\begin{vmatrix} x^{2022} & 2^{2022} & \cdots & 2024^{2022} \\ (x+1)^{2022} & 3^{2022} & \cdots & 2025^{2022} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x+2023)^{2022} & 2025^{2022} & \cdots & 4047^{2022} \end{vmatrix}$$

则由行列式定义可知 $F(x)$ 为一个 2022 次多项式，但 $F(2)=\cdots=F(2024)=0$

有 2023 个根，故 $F(x)$ 为零多项式，即 $F(1)=0$，结论成立。

(2) (Remark: 证明一个整数 $\neq 0$ → 证明在模 2 意义不为 0)

行列式模 2 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 2023 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 2023^2 & 2024^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 2024^3 & 2024^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2023^{2023} & 2024^{2023} & 2024^{2023} & \cdots & 2024^{2023} & 2024^{2023} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod 2$$

从而这个行列式为奇数，不为 0。