数学外卖-行列式

戴云舒　谢明灿

2024/11/16

1　行列式，行列式的性质

定义 1.1 (行列式). 称形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} \delta(i_1,\cdots,i_n) a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

的 n^2 个数构成的方阵为一个 n 阶行列式.

下设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

命题 1.1 (按行/列展开). $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$.　$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

命题 1.2 (Laplace 展开). $|A| = \sum\limits_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$.

命题 1.3 (Binet-Cauchy 公式). 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则

(1) $n > m$ 有 $|AB| = 0$.

(2) $n = m$ 有 $|AB| = |A||B|$.

(3) $n < m$ 有

$$|AB| = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant m} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

对于列有类似的结论.

2　习题

问题 2.1 (三对角行列式). (1) 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$

(2) $D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

问题 2.2 (Vandermonde 行列式). (1) 证明:

$$V_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

(2) 设 $f_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$, 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix}1&f_1(x_1)&f_2(x_1)&\cdots&f_{n-1}(x_1)\\1&f_1(x_2)&f_2(x_2)&\cdots&f_{n-1}(x_2)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&f_1(x_n)&f_2(x_n)&\cdots&f_{n-1}(x_n)\end{vmatrix}.$$

问题 2.3. 设 $a_{ij}(t)$ 均为可导函数, 且 $F(t)=\begin{vmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}$. 证明:

$$F'(t)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1,j-1}(t)&a'_{1j}(t)&a_{1,j+1}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&\cdots&a_{2,j-1}(t)&a'_{2j}(t)&a_{2,j+1}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}(t)&\cdots&a_{n,j-1}(t)&a'_{nj}(t)&a_{n,j+1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

问题 2.4. 证明:

(1) 设 $A\in\mathbf{F}^{n\times n},B\in\mathbf{F}^{m\times m}$, 证明:

$$\begin{vmatrix}A&O\\&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&*\\O&B\end{vmatrix}=|A||B|,\quad\begin{vmatrix}O&A\\B&*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|.$$

(2) 设 $A,B,C,D\in\mathbf{F}^{n\times n}$, 其中 A 可逆, 且 $AC=CA$, 证明:$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

(3) 设 $A,B,C,D\in\mathbf{F}^{n\times n}$, 其中 $AC=CA$, 证明:$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

问题 2.5. 设 $A\in\mathbf{F}^{m\times n},B\in\mathbf{F}^{n\times m}$,$\lambda$ 是未定元. 证明

$$\lambda^n\left|\lambda E_m-AB\right|=\lambda^m\left|\lambda E_n-BA\right|.$$

问题 2.6. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的元素均为复数，且满足

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

称这样的矩阵为主对角占优矩阵. 证明:$|A|\neq 0$.

问题 2.7. 设多项式 $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\in\mathbf{F}[x]$ 的次数都不超过 $n-2$, 其中 $n\geq 2$, 证明: 对任意 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{F}$, 有

$$\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_1(a_2)&\cdots&f_1(a_n)\\f_2(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_2(a_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_n(a_1)&f_n(a_2)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

问题 2.8. 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵. 令 $M=\begin{vmatrix} A & B & C & D\\ B & A & D & C\\ C & D & A & B\\ D & C & B & A\end{vmatrix}$. 证明:

$$|M|=|A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

问题 2.9. 设n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & & 1 & \cdots & 1\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{pmatrix}$, 求$|A|$的所有代数余子式之和.

问题 2.10. 计算以下 n 阶 ***Cauchy*** 行列式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}.$$

问题 2.11. 计算以下行列式的值:

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}$.

问题 2.12 (Pfaffian 值)**.** 在这个小题中, 我们将会介绍 *Pfaffian* 值的概念.

(1) 计算以下行列式的值, 并尝试因式分解你的结果.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix}$$

(2) (Burnside) $A=(a_{ij})$ 为 n 阶斜对称阵, 且 n 为偶数. 证明: 若将 a_{ij} 看成未定元, 则 $|A|$ 为完全平方数.

由 (2), 我们定义

定义 2.1 (Pfaffian 值)**.** 定义一个 $2n$ 阶反对称阵 A 的行列式的平方根为这个矩阵的 *Pfaffian* 值, 记作 $\mathrm{pf(A)}$.

试证明:

(3) $\mathrm{pf(A^T)=(-1)^n pf(A)}$

(4) $\mathrm{pf(BAB^T)=pf(A)\det(B)}$.

Pfaffian 值还有一些等价的定义 (需要用到外微分).

(5) $\mathrm{pf(A)}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{2n}=\dfrac{1}{n!}\Lambda^n(\sum\limits_{i<j}a_{ij}e_i\wedge e_j)$.

问题 2.13. (1) 若 $2n$ 阶实矩阵 A 满足

$$A\begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}A^T=\begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}.$$

证明: $|A|=1$.

(2) 若 A 为 $2n$ 阶复方阵情况又将如何呢?

问题 2.14. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵,$n\geq 2$.

(1) 证明：$|\mathrm{adj}(A)|=|A|^{n-1}$

(2) 设 $|A|=d\neq 0$, 记 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}, 证明:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}d^{n-2}.$$

问题 2.15. 设 $A\in\mathbf{F}^{n\times n},\alpha,\beta\in\mathbf{F}^n$, 证明:$|A+\alpha\beta^T|=|A|+\beta^T\,\mathrm{adj}(A)\alpha$, 其中一阶矩阵的伴随矩阵约定为 1.

问题 2.16. 证明:

(1)

$$\begin{vmatrix} 1^{2022} & 2^{2022} & \cdots & 2024^{2022} \\ 2^{2022} & 3^{2022} & \cdots & 2025^{2022} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2024^{2022} & 2025^{2022} & \cdots & 4047^{2022} \end{vmatrix}=0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 & 2022 & 2023 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 2022^2 & 2023^2 & 2024^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 2023^3 & 2024^3 & 2024^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2022^{2022} & 2023^{2022} & 2024^{2022} & \cdots & 2024^{2022} & 2024^{2022} & 2024^{2022} \\ 2023^{2023} & 2024^{2023} & 2024^{2023} & \cdots & 2024^{2023} & 2024^{2023} & 2024^{2023} \end{vmatrix}\neq 0.$$