知识点：

行列式是什么？

① 一种整体与局部的关系：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} \delta(i_1,\cdots,i_n)\, a_{1,i_1}\cdots a_{n,i_n}$$

以及 Laplace 展开 & <u>Binet - Cauchy 公式</u>.

i. $$\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

ii. $$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\varphi_1) & \cos(\theta_1-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_1-\varphi_n) \\ \cos(\theta_2-\varphi_1) & \cos(\theta_2-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_2-\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\theta_n-\varphi_1) & \cos(\theta_n-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_n-\varphi_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\theta_n & \sin\theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \cdots & \sin\varphi_n \\ \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos\varphi_n \end{bmatrix}$$

iii. $$\begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^2 & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix} = C_n^0 C_n^1 \cdots C_n^n \begin{bmatrix} a_0^n & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^n & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_0^n & \cdots & b_n^n \end{bmatrix}$$

② 一种有向"体积" & 描述线性映射的满射性.

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ 是线性映射：把 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

面积即 $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$，面积为 0 即 φ 不是满的.

③ 一种多重线性映射（Alternating —— 反对称的 in 李忠华老师讲义）

k倍行列式函数 $\Leftrightarrow$ 多重线性 & 反对称的

$f(x_1,x_2)$ 是双线性的，i.e. 对 x_1、x_2 分别都是线性的.

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)=f(\alpha_1,\beta_1+\beta_2)+f(\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$$

$$=f(\alpha_1,\beta_1)+f(\alpha_1,\beta_2)+f(\alpha_2,\beta_1+\beta_2).$$

$$f(kx_1,x_2)=kf(x_1,x_2)=f(x_1,kx_2)$$

如果 $\exists\ i\neq j$，但 $x_i=x_j$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\longrightarrow$ 反对称的

不需要有反对称.

$f(x(t),y(t))$ 是双线性映射，则 $\frac{d}{dt}f=f(x',y)+f(x,y')$

证：$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))-f(x(t),y(t))}{\Delta t}$

$f(x(t),y(t))\neq x(t)f(1,y(t))$

（类比一下行列式）

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t))+f(x(t),y(t+\Delta t)-y(t))}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x'(t)\cdot\Delta t,y(t+\Delta t))+f(x(t),y'(t)\Delta t)}{\Delta t}$$

$f(x(t),y'(t)\Delta t)=\Delta t f(x(t),y(t))$

（因为 Δt 是数）

$$=\lim_{\Delta t\to 0}f(x'(t),y(t+\Delta t))+f(x(t),y'(t))$$

$$=f(x'(t),y(t))+f(x(t),y'(t))$$

行列式的计算方法（常用）：

① 硬算！或者初等变换法.

② 按行展开（Laplace 展开）得到递归式.

形如：$D_n=a_n+b_nD_{n-1}$ $\cdots$

③ Binet - Cauchy 公式法：

$$|D| = |AB| \begin{cases} \to |A||B| & A, B \text{均为方阵} \\ \to \text{Binet-Cauchy 公式.} \end{cases}$$

④ 分块阵的初等变换法：

$$\begin{bmatrix} I_n & A_{n\times m} \\ B_{m\times n} & I_m \end{bmatrix} \longrightarrow |I_n - A_{n\times m} B_{m\times n}| = |I_m - B_{m\times n} A_{n\times m}|$$

⑤ 扰动法.（化一般为特别 & 行列式函数的连续性）

A, B, C, D 为 n 阶方阵，$AC=CA$，记 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$

扰动后仍交换 (Important)

反对称阵的Pfaffian数：（肯定不考，竞赛难说，但肯定不会直接出）.

若 A 是 n 阶反对称阵，并且设其元素为整数，则知：

① n 为奇数时，$\det(A) = 0$

② n 为偶数时，$\det(A)$ 为完全平方数.

则记 $\det(A)$ 的一个平方根（可能正，可能负）为 Pfaffian 数，记为 $pf(A)$.

严谨定义 2n 阶反对称阵 A 的 Pfaffian 数为.

$$pf(A) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{S_{2n}} \delta(i_1, i_2, \cdots, i_{2n})\, a_{i_1 i_2}\, a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{2n-1} i_{2n}}.$$

用外微分定义会更简单：

$$pf(A)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2n} = \frac{1}{n!} \Lambda^n \Big(\sum_{i<j} a_{ij}\, e_i \wedge e_j \Big)$$

使用方法

可见 2.12(1)

以及 2.18

其中"∧"符号运算与行列式很像：

$e_1\wedge e_2 = -e_2\wedge e_1$ （交换一次多一个负号）

$e_i\wedge e_i = 0$ （有相同元直接为0）

$$\wedge^n\Big(\sum_{1\le i<j\le 2n} a_{ij}\, e_i\wedge e_j\Big) = \Big(\sum_{i<j} a_{ij}\, e_i\wedge e_j\Big)\wedge \underbrace{\cdots\wedge\Big(\sum_{i<j} a_{ij}\, e_i\wedge e_j\Big)}_{\text{共}n\text{个（用分配律）}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

例：$\wedge^2(2e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4)$

$= (2e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4)\wedge(2e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4)$

$= \underbrace{4e_1\wedge e_2\wedge e_1\wedge e_2}_{=0} + 2e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4 + \underbrace{2e_3\wedge e_4\wedge e_1\wedge e_2}_{=2e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4} + \underbrace{e_3\wedge e_4\wedge e_3\wedge e_4}_{=0}$

两次交换1&3，2&4
符号仍为正

$= 4e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$

注：$e_3\wedge e_4\wedge e_1\wedge e_2 = -e_1\wedge e_4\wedge e_3\wedge e_2$

以及 $pf(A)\, e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4 = \frac{1}{2!}\cdot 4e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$

$\therefore\ pf(A) = 2 \qquad det(A) = pf^2(A) = 4.$

性质：① $pf^2(A) = det(A)$

② $pf(BAB^T) = pf(A)\, det(B)$ Important.