高等代数（加）讲座: 线性映射与特征值

许子寒　杨磊

2024 年 11 月 10 日

1. 已知 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 对于基 $\alpha_1=(-1,0,2)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(3,-1,-6)^T$ 的像为 $\mathscr{A}(\alpha_1)=(-1,0,1)^T,\mathscr{A}(\alpha_2)=(0,-1,2)^T,\mathscr{A}(\alpha_3)=(-1,-1,3)^T$.

(1) 验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

(2) 试求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然基下的矩阵.

2. 设 $\mathscr{A}$ 是三维线性空间 V 上的线性变换,$\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\2&-4&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 和 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的维数和一组基;

(2) 将线性变换 $\mathscr{A}$ 对角化.

3. 判断下列矩阵是否可对角化, 如果可对角化将其对角化: *(1)* $\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$; *(2)* $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

4. 试求

$$A=\begin{pmatrix}1&b&a&c\\0&2&c&a\\0&0&1&b\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

可对角化的充要条件.

5. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义映射

$$\varphi_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},\ \varphi_A(X)=AX-XA.$$

(1) 证明:φ_A 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换;

(2) 当 $n=2$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 时, 求 φ_A 在自然基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的矩阵;

(3) 当 A 可对角化时, 证明:φ_A 可对角化.

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$ 满足 $|A|=-1$, 并且其伴随阵 $\operatorname{adj}(A)$ 有一个特征值 λ_0 且对应的特征向量为 $(-1,-1,1)^T$, 求 a,b,c,λ_0.

7. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换,W 是 V 的子空间, 证明:

$$\dim W=\dim(\mathscr{A}(W))+\dim(\ker\mathscr{A}\cap W),$$

其中 $\mathscr{A}(W)=\{\mathscr{A}(\alpha)\colon \alpha\in W\}$.

8. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换满足 $\mathscr{A}^2+2\mathscr{E}=3\mathscr{A}$, 证明: $V=\operatorname{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})\oplus\operatorname{Im}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$.

9. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同, 则 $\mathscr{A}$ 是一个数乘变换.

10. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 如果 V 的每一个子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathscr{A}$ 是一个数乘变换.

11. 设 N 是 n 阶幂零阵, 幂零指数恰为 n(即 $N^{n-1}\neq O, N^n=O$), 证明: N 相似于 $\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}$.

12. 设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+B$, 已知 B 的特征值为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$, 求 A 的所有特征值.

13. 已知 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$, 求 $\begin{pmatrix}A&A^2\\A^2&A\end{pmatrix}$ 的所有特征值.

14. 设 $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为对角阵, 其特征多项式为

$$\varphi_D(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{F}$ 互异, 设

$$V=\{B\in\mathbb{F}^{n\times n}: BD=DB\},$$

证明 V 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间, 并且 $\dim V=m_1^2+\cdots+m_s^2$.

15. 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明以下三条等价:
(1) $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda))=1$; *(2)* $\varphi_A(B)$ 可逆; *(3)* 矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

16. 设 V 是复数域上 n 维线性空间, $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 是 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$. 证明:

(1) 如果 λ_0 是 $\mathscr{A}_1$ 的特征值, 则 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间;

(2) $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 至少有一个公共特征向量;

(3) 如果 $\mathscr{A}_1$ 有 n 个不同的特征值, 则 V 必存在一个基使 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 在这个基下的矩阵同时为对角矩阵.

17. 设有 n 阶矩阵 A,B, 若 A 是幂零的, 且 $AB=BA$, 则 $|A+B|=|B|$.

18. 设 n 阶复矩阵 A 有 n 个不同的特征值. 求证: 复矩阵 B 可对角化的充分必要条件是存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ 使得 B 相似于 $f(A)$.