习题解答

1. 已知 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 对于基 $\alpha_1=(-1,0,2)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(3,-1,-6)^T$ 的像为 $\mathscr{A}(\alpha_1)=(-1,0,1)^T,\mathscr{A}(\alpha_2)=(0,-1,2)^T,\mathscr{A}(\alpha_3)=(-1,-1,3)^T$.

(1) 验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

Sol 只需验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而

$$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|=\begin{vmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&-6\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，进而是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

(2) 试求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵;

Sol 设 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 A，则有

$$(\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\mathscr{A}(\alpha_3))=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$$

从而有 $A=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&-6\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&9&7\\-1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然基下的矩阵.

Sol 记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，设 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然基下的矩阵为 $\hat{A}$，则 $A=P^{-1}\hat{A}P$，从而有

$$\hat{A}=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}-7&4&-4\\-4&1&-2\\15&-6&8\end{pmatrix}.$$

2. 设 $\mathscr{A}$ 是三维线性空间 V 上的线性变换，$\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\2&-4&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 和 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ 的维数和一组基;

Sol 作初等变换

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\2&-4&2\\2&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是有 $\dim \mathrm{Im}\,\mathscr{A}=\dim\mathrm{span}\{\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\mathscr{A}(\alpha_3)\}=2$，有基 $2\alpha_2+2\alpha_3$，$-2\alpha_1-4\alpha_2-2\alpha_3$.

而 $\dim\ker\mathscr{A}=1$，有基 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(2) 将线性变换 $\mathscr{A}$ 对角化.

Sol $\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+2)^2$，故 $\mathscr{A}$ 有特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=-2$.

对于 $\lambda_1=0$ 由(1)有特征向量 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-2$，解方程 $(A+2E)x=0$ 有解 $p_2=(1,1,0)^T$, $p_3=(1,0,-1)^T$, 从而有特征向量 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$

故在 V 的基 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ 下 $\mathcal{A}$ 的矩阵为对角阵 $diag\{0,-2,-2\}$.

3. 判断下列矩阵是否可对角化，如果可对角化将其对角化：*(1)* $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} = A$

Sol 由于 $\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda-4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$

解方程 $(A-2E)x=0$ 得特征向量 $(2,1,0)^T$, $(2,0,1)^T$, 解 $(A-E)x=0$ 得特征向量 $(3,-1,3)^T$.

于是令 $P=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $=B$

Sol $\varphi_B(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$, 而 $(B-2E)(B-E)=\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$, 故 B 不可对角化.

4. 试求

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & a & c \\ 0 & 2 & c & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可对角化的充要条件.

Sol 显然 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=2$. 故 A 可对角化 $\Longleftrightarrow d_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$

而 $(A-E)(A-2E)=\begin{pmatrix} O & M \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $M=\begin{pmatrix} bc-a & 2ab \\ 0 & bc+a \end{pmatrix}$, 于是 A 可对角化 $\Leftrightarrow a=0, bc=0$.

5. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义映射

$$\varphi_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},\ \varphi_A(X)=AX-XA.$$

(1) 证明：φ_A 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换；

Proof $\varphi_A(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=(AX-XA)+(AY-YA)=\varphi_A(X)-\varphi_A(Y)$

$\varphi_A(cX)=A(cX)-(cX)A=c(AX-XA)=c\varphi_A(X)$

故 φ_A 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换. □

(2) 当 $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 时，求 φ_A 在自然基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的矩阵；

Sol 所求为 $\begin{pmatrix} 0 & -b & b & 0 \\ -c & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -b \\ 0 & c & -c & 0 \end{pmatrix}$

(3) 当 A 可对角化时，证明：φ_A 可对角化.

Proof 若A可对角化，则存在可逆阵P使 $A=P\Lambda P^{-1}$，其中 $\Lambda=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，$\lambda_i$为A的特征值.

取 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的基 $\{PE_{ij}P^{-1}: 1\le i,j\le n\}$ 有 $\varphi_A(PE_{ij}P^{-1}) = P\Lambda E_{ij}P^{-1} - PE_{ij}\Lambda P^{-1} = (\lambda_i-\lambda_j)PE_{ij}P^{-1}$

从而 φ_A 在 $\{PE_{ij}P^{-1}\}$ 下的矩阵为对角阵. 即可对角化. □

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$ 满足 $|A|=-1$，并且其伴随阵 $\mathrm{adj}(A)$ 有一个特征值 λ_0 且对应的特征向量为 $(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c,λ_0.

Sol 记 $p=(-1,-1,1)^T$，则 $\mathrm{adj}(A)\cdot p=\lambda_0 p$，从而有 $\lambda_0 Ap=-p$. 即

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 \\ \lambda_0(-b-2)=1 \\ \lambda_0(c-1-a)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ \lambda_0=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

又 $\det A = a-3=-1$，从而 $a=c=2$.

7. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换，W 是 V 的子空间，证明：

$$\dim W = \dim(\mathscr{A}(W)) + \dim(\ker\mathscr{A}\cap W),$$

其中 $\mathscr{A}(W)=\{\mathscr{A}(\alpha): \alpha\in W\}$.

Proof 若 $\ker\mathscr{A}\cap W=\{0\}$，取W的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，其中 $m=\dim W$. 来证 $\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_m)$ 是 $\mathscr{A}(W)$ 的基.

一方面，任取 $\beta\in\mathscr{A}(W)$，存在 $\alpha=\sum k_i\alpha_i\in W$，s.t. $\beta=\mathscr{A}(\alpha)=\sum_{i=1}^{m}k_i\mathscr{A}(\alpha_i)$. 另一方面设 $\sum t_i\mathscr{A}(\alpha_i)=0$

则有 $\sum t_i\alpha_i\in W\cap\ker\mathscr{A}=\{0\}$，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关有 $t_i=0$. 即 $\mathscr{A}(\alpha_1)\cdots\mathscr{A}(\alpha_m)$ 线性无关.

因此 $\dim\mathscr{A}(W)=m=\dim W$.

若 $\ker\mathscr{A}\cap W\ne\{0\}$，取它的基 $\xi_1,\cdots,\xi_k$，扩为W的基 $\xi_1,\cdots,\xi_k,\xi_{k+1},\cdots,\xi_m$，其中 $m=\dim W$.

类似可证 $\mathscr{A}(\xi_{k+1}),\cdots,\mathscr{A}(\xi_m)$ 是 $\mathscr{A}(W)$ 的基. 则有 $\dim\mathscr{A}(W)+\dim(\ker\mathscr{A}\cap W)=m=\dim W$. □

8. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换满足 $\mathscr{A}^2+2\mathscr{E}=3\mathscr{A}$，证明：$V=\mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})\oplus\mathrm{Im}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$.

Proof 由于 $\mathscr{A}$ 有化零多项式 $d(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$，则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$，于是

知 $\mathscr{A}$ 可对角化，且有V的直和分解 $V=\ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})\oplus\ker(\mathscr{A}-2\mathscr{E})$.

下证 $\ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})$. 一方面，设 $\beta=(\mathscr{A}-2\mathscr{E})(\alpha)\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})$，则有

$$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\beta)=(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\mathscr{A}-2\mathscr{E})(\alpha)=0$$

即 $\beta\in\ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})$. 另一方面，设 $\eta\in\ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})$，由于 $(\lambda-1,\lambda-2)=1$，则存在 $u(\lambda),v(\lambda)$，s.t.

$$u(\lambda)(\lambda-1)+v(\lambda)(\lambda-2)=1$$

则有 $\eta=\mathscr{E}(\eta)=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\eta)+v(\mathscr{A})(\mathscr{A}-2\mathscr{E})(\eta)=(\mathscr{A}-2\mathscr{E})(v(\mathscr{A})(\eta))\in \mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})$

故 $\ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})$，同理有 $\ker(\mathscr{A}-2\mathscr{E})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$. 故 $V=\mathrm{Im}(\mathscr{A}-2\mathscr{E})\oplus\mathrm{Im}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$. □

9. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同，则 $\mathscr{A}$ 是一个数乘变换.

Proof 这等价于对 $\forall P\in GL_n(\mathbb{F})$ 有 $P^{-1}AP=A$. 则 $A=\lambda E$. □

10. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，如果 V 的每一个子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $\mathscr{A}$ 是一个数乘变换.

Proof 取 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 记 $V_i=\mathrm{span}\{\alpha_i\}$. 由于 $\mathscr{A}(V_i)\subset V_i$. 则存在 λ_i, s.t. $\mathscr{A}(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$

又设 $W=\mathrm{span}\{\alpha_1+\alpha_2\}$. 则有 $\mathscr{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=k(\alpha_1+\alpha_2)$. 这就有 $\lambda_1=\lambda_2$. 同理可证

$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$. 因此 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 λ_1E, 自然是数乘变换. □

11. 设 N 是 n 阶幂零阵，幂零指数恰为 n(即 $N^{n-1}\neq O, N^n=O$)，证明：N 相似于 $\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}$.

Proof 考虑 $\mathbb{F}^n$ 上的左乘 $\mathscr{N}:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$. $\mathscr{N}(\alpha)=N\alpha$. 则存在 $\alpha\in\mathbb{F}^n$ 使 $\mathscr{N}^{n-1}(\alpha)\neq 0$.

下面来证 $\alpha,\mathscr{N}(\alpha),\cdots,\mathscr{N}^{n-1}(\alpha)$ 是一组基. 那么 $\mathscr{N}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}$

设有 $k_0\alpha+k_1\mathscr{N}(\alpha)+\cdots+k_{n-1}\mathscr{N}^{n-1}(\alpha)=0$. 则有 $k_0\mathscr{N}^{n-1}(\alpha)=0$, 故 $k_0=0$, 同理有 $k_1=\cdots=k_{n-1}=0$

因此有 $\alpha,\mathscr{N}(\alpha),\cdots,\mathscr{N}^{n-1}(\alpha)$ 是一组基. □

12. 设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+B$，已知 B 的特征值为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$，求 A 的所有特征值.

[假定 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异] 设 B 属于 λ_i 的特征向量为 α_i. 则有 $AB\alpha_i=\lambda_iA\alpha_i=2A\alpha_i+\lambda_i\alpha_i$

即 $A(2-\lambda_i)\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$. 断言 $\lambda_i\neq 2$, 否则 $2\alpha_i=0$, 故 $A\alpha_i=\frac{\lambda_i}{2-\lambda_i}\alpha_i$. 即 A 特征值为 $\frac{\lambda_1}{2-\lambda_1},\cdots,\frac{\lambda_n}{2-\lambda_n}$.

13. 已知 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$，求 $\begin{pmatrix}A&A^2\\A^2&A\end{pmatrix}$ 的所有特征值.

Sol [假定 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异] 设 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$ 则有

$$\begin{pmatrix}A&A^2\\A^2&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\\alpha_i\end{pmatrix}=(\lambda_i+\lambda_i^2)\begin{pmatrix}\alpha_i\\\alpha_i\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}A&A^2\\A^2&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\-\alpha_i\end{pmatrix}=(\lambda_i-\lambda_i^2)\begin{pmatrix}\alpha_i\\-\alpha_i\end{pmatrix}$$

故 $\begin{pmatrix}A&A^2\\A^2&A\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1\pm\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n\pm\lambda_n^2$

14. 设 $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 为对角阵，其特征多项式为

$$\varphi_D(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s \in \mathbb{F}$ 互异，设

$$V = \{B \in \mathbb{F}^{n\times n} : BD = DB\},$$

证明 V 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，并且 $\dim V = m_1^2+\cdots+m_s^2$.

Proof 设 $B_1, B_2 \in V$，则 $(B_1+B_2)D = B_1D+B_2D = DB_1+DB_2 = D(B_1+B_2)$，即 $B_1+B_2 \in V$

又对 $c\in\mathbb{F}$ 有 $(cB_1)D = cDB_1 = D(cB_1)$. 即 $cB_1\in V$. 故 V 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

由题有 $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1E_{m_1},\cdots,\lambda_sE_{m_s}\}$. 将 B 进行同样的分块 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss}\end{pmatrix}$

由 $BD=DB$ 有 $\lambda_1B_{12} = \lambda_2B_{12}$，而 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $B_{12}=O$. 同理有 $B_{ij}=O\ (i\neq j)$. 从而 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss}\end{pmatrix}$

并且容易验证形如 $\begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss}\end{pmatrix}$ 的矩阵与 D 可交换. 故 $V = \left\{\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s\end{pmatrix} : B_i \in \mathbb{F}^{m_i\times m_i}\right\}$

从而 $\dim V = m_1^2+\cdots+m_s^2$.

15. 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，证明以下三条等价：
(1) $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda)) = 1$； *(2)* $\varphi_A(B)$ 可逆； *(3)* 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.

Proof (1) ⇒ (2) 设 $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda))=1$. 则有在 $u(\lambda), v(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$ 使

$$u(\lambda)\varphi_A(\lambda)+v(\lambda)\varphi_B(\lambda) = 1$$

代入 B 由 Cayley-Hamilton 定理有 $u(B)\varphi_A(B) = E$，故 $\varphi_A(B)$ 可逆.

(2) ⇒ (3) 由 $AX=XB$ 可得 $\varphi_A(A)X = O = X\varphi_A(B)$，而 $\varphi_A(B)$ 可逆，这就有 X 只能为 O.

(3) ⇒ (1) 反证. 设 $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda))\neq1$. 则 $\varphi_A(\lambda)$, $\varphi_B(\lambda)$ 有公共复根 λ_0，从而 A, B 有公共特征值 λ_0.

由 $B\simeq B^T$ 知 B^T 亦有特征值 λ_0. 故存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ 使 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，$B^T\beta=\lambda_0\beta$. 即 $\beta^TB = \lambda_0\beta^T$. 则有

$$A(\alpha\beta^T) = \lambda_0\alpha\beta^T = (\alpha\beta^T)B$$

即 $AX=XB$ 有非0解. □

16. 设 V 是复数域上 n 维线性空间，$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 是 V 的线性变换，且 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$. 证明：
(1) 如果 λ_0 是 $\mathscr{A}_1$ 的特征值，则 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间；

Proof 设 $\alpha\in V_{\lambda_0}$. 则有 $\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2(\alpha)) = \mathscr{A}_2(\mathscr{A}_1(\alpha)) = \lambda_0\mathscr{A}_2(\alpha)$. 即 $\mathscr{A}_2(\alpha)\in V_{\lambda_0}$. 故 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间

(2) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 至少有一个公共特征向量；

Proof 由于 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间，于是有限制变换 $\mathscr{A}_2|_{V_{\lambda_0}}$，那么 $\mathscr{A}_2|_{V_{\lambda_0}}$ 有特征向量 β. 即为所求. □

(3) 如果 $\mathscr{A}_1$ 有 n 个不同的特征值，则 V 必存在一个基使 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 在这个基下的矩阵同时为对角矩阵.

Proof 设$\mathscr{A}_1$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，特征子空间为$V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_n}$，则$V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n}$.

由(1)(2)，$\mathscr{A}_2$在每个V_{λ_i}中都有特征向量ξ_i，于是在$\xi_1,\cdots,\xi_n$下$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$均为对角阵. □

17. 设有 n 阶矩阵 A, B, 若 A 是幂零的, 且 $AB = BA$, 则 $|A+B| = |B|$.

Proof 将A、B视为复方阵，则A、B可同时上三角化，从而$|A+B|=|B|$. □

18. 设 n 阶复矩阵 A 有 n 个不同的特征值. 求证: 复矩阵 B 可对角化的充分必要条件是存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ 使得 B 相似于 $f(A)$.

Proof 不妨将A取为对角阵$A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

充分性：若$B\approx f(A)$，则$B\approx \mathrm{diag}\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$，当然可对角化

必要性：设B可对角化，则$B\approx \mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}$，其中$\mu_i$为B特征值，由Lagrange插值定理

可知存在$f(\lambda)\in\mathbb{C}_{n-1}[\lambda]$使$f(\lambda_i)=\mu_i$. 故$B\approx f(A)$. □