高等代数（加）讲座: 多项式

杨磊　吴佳骏

2024 年 10 月 26 日

1. 设 m,n,l 是正整数, 证明 $x^2+x+1|x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3l+2}$.

2. 设 $g(x)=ax+b$, 其中 $a,b\in\mathbb{F}$, $a\neq 0$. 证明：对任意的多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, $g(x)\,|f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)|f^2(x)$.

3. 设 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$, $g(x)=ax^2+bx+c$, 其中 $abc\neq 0$. 证明 $g(x)\,|f(x)$ 的充分必要条件是

$$\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}.$$

4. 设 $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$ 互素, 证明: 存在唯一的 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 并且 $\deg u(x)<\deg g(x),\deg v(x)<\deg f(x)$.

5. 解决下列问题:

(1) 求 $f(x)=x^3+3x^2+7x+12$ 和 $g(x)=x^2+2x+4$ 的最大公因式 $d(x)$, 并求出次数最低的多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$;

(2) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3+3A^2+7A+12E=O$, 其中 E 是 n 阶单位阵. 证明：$A^2+2A+4E$ 可逆, 并求出次数最低的实系数多项式 $v(x)$ 使得 $v(A)=(A^2+2A+4E)^{-1}$.

6. 将 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3}$ 的分子分母乘以适当的数, 使得分母成为有理数.

7. 求 t 的值, 使得 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

8. 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 是实系数多项式. 若对于任意 $a\in\mathbb{R}$ 有 $f(a)>0$, 证明: 存在无实根的复系数多项式 $\psi(x)$ 使得 $f(x)=|\psi(x)|^2$.

9. 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 是实系数多项式, 而 $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1) 判断正误: 若 α 是 $f'(x)$ 的 k 重根 $(k\geq 2)$, 则 α 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根;

(2) 若 $f(x)$ 的根均为实数, 那么 *(1)* 中的论断正确吗?

10. 求有理系数多项式 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$ 的重因式和标准分解式, 并求首一多项式 $g(x)$, 使得 $g(x)$ 没有重因式, 并且和 $f(x)$ 有相同的不可约因式.

11. 求 $g(x)=x^6-2x^5-5x^2+11x-2$ 的有理根以及其在 $\mathbb{Q}$ 上的标准分解式.

12. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不同的整数, 证明多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$$

在有理数域上不可约.

13. 设有理系数多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 而非零复数 α 是 $f(x)$ 的根.

(1) 定义

$$M=\{g(x)\in\mathbb{Q}[x]:g(\alpha)=0\}\subset\mathbb{Q}[x],$$

证明: $g(x)\in M$ 的充分必要条件是 $f(x)\,|\,g(x)$;

(2) 定义

$$\mathbb{Q}[\alpha]=\{h(\alpha):h(x)\in\mathbb{Q}[x]\},$$

计算 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\alpha]$;

(3) 证明: $\mathbb{Q}[\alpha]$ 是一个数域.

14. 记 $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ 为全体次数不超过 $n-1$ 的复系数多项式构成的复线性空间.

(1) 证明: $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{n-1}[x]=n$;

(2) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为互不相同的复数. 给出多项式 $\delta_1,\cdots,\delta_n\in\mathbb{C}_{n-1}[x]$ 使得 $\delta_i(a_i)=1$, 且 $i\neq j$ 时有 $\delta_i(a_j)=0$, 并证明 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 构成 $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ 的一组基;

(3) 证明: 对于任意复数 $b_1,\cdots,b_n$, 存在多项式 $f(x)\in\mathbb{C}_{n-1}[x]$ 使得 $f(a_i)=b_i$.

(4) 证明中国剩余定理: 设 $g_1(x),\cdots,g_s(x)\in\mathbb{F}[x]$ 两两互素,$f_1(x),\cdots,f_s(x)\in\mathbb{F}[x]$, 那么存在唯一的 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $f(x)$ 除以 $g_i(x)$ 的余式为 $f_i(x)\,(i=1,\cdots,s)$, 并且 $\deg f(x)<\sum_{i=1}^{s}\deg g_i(x)$.

15. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的整数, 证明: 方程组

$$\begin{cases}a_1^{n-1}x_1+a_1^{n-2}x_2+\cdots+a_1x_{n-1}+x_n=-a_1^n\\a_2^{n-1}x_1+a_2^{n-2}x_2+\cdots+a_2x_{n-1}+x_n=-a_2^n\\\qquad\qquad\qquad\vdots\\a_n^{n-1}x_1+a_n^{n-2}x_2+\cdots+a_nx_{n-1}+x_n=-a_n^n\end{cases}$$

有唯一解, 并求出它的解.

16. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实方阵, 已知 A 的特征值均为实数, 且 A 的一阶主子式之和与二阶主子式之和均为 0, 证明: A 是幂零阵.