1、证明:

令 $x_0^2+x_0+1=0$

∴ $x_0=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

∴ $x_0^3=1$

∴ $x_0^2+x_0+1=0$

∴ $(x_0^2)\cdot(x_0^3)^l+(x_0)\cdot(x_0^3)^n+1\cdot(x_0^3)^m=0$

即 $(x_0)^{3l+2}+(x_0)^{3n+1}+x_0^{3m}=0$.

∴ x_0 也是 $x^{3l+2}+x^{3n+1}+x^{3m}$ 的根

∴ $(x^2+x+1)\mid x^{3l+2}+x^{3n+1}+x^{3m}$

2、证明

必要性

∵ $g(x)\mid f(x)$

∴ 设 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ $(h(x)\neq 0)$

∴ $f^2(x)=g^2(x)\cdot h^2(x)$

∴ $g(x)\mid f^2(x)$

充分性

设 $(g(x),f(x))=d(x)$ $(d(x)\neq 0)$

∴ $f(x)=f_1(x)d(x)$

$g(x)=g_1(x)d(x)$

∴ $(f_1(x),g_1(x))=1$

又∵ $g(x)\mid f^2(x)$

∴ $g_1(x)d(x)\mid f_1^2(x)\cdot d^2(x)$

∴ $g_1(x)\mid d(x)$

又∵ $g(x)=ax+b$

$\deg(g(x))=1$

∴ $\deg(g_1(x))+\deg(d(x))=1$

又∵ $g_1(x)\mid d(x)$

∴ $\deg(g_1(x))\le\deg(d(x))$

∴ $\deg(g_1(x))=0$

$\deg(d(x))=1$

∴ $\cancel{d(x)=c\,g_1(x)}$ (c为常数 且 $c\neq 0$)

$g_1(x)=c$

∴ $g(x)=c\cdot d(x)$

∴ $g(x)\mid f(x)$.

3、证明: 必要性:

∵ $g(x)\mid f(x)$

∴ $(mx+n)(ax^2+bx+c)=x^3+\cancel{q}px^2+qx+r$

∴ $max^3+nax^2+mbx^2+nbx+mcx+nc=x^3+px^2+qx+r$

∴ $\begin{cases} ma=1 \\ na+mb=p \\ nb+mc=q \\ nc=r \end{cases}$

∴ $\frac{1}{a}=m$, $\frac{r}{c}=n$

$\frac{ar}{c}+\frac{b}{a}=p$ $\quad\frac{br}{c}+\frac{c}{a}=q$

∴ $\frac{ap-b}{a}=\frac{ar}{c}$

$\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$

充分性

$\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$

∴ $p=\frac{ar}{c}+\frac{b}{a}$

$q=\frac{br}{c}+\frac{c}{a}$

∴ $x^3+(\frac{ar}{c}+\frac{b}{a})x^2+(\frac{br}{c}+\frac{c}{a})x+r$

⇕

$acx^3+(a^2r+bc)x^2+(abr+c^2)x+acr$

⇕

$(ax^2+bx+c)(cx+ar)$

∴ $ax^2+bx+c\mid x^3+px^2+qx+r$

4、证明

存在性

∵ $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

∴ $u(x)f(x)=1-v(x)g(x)$

∴ $\deg(u(x)f(x))=\deg(1-v(x)g(x))$

即 $\deg(u(x))+\deg(f(x))=\deg(v(x))+\deg(g(x))$

∴若 $\deg u(x)<\deg(g(x))$

则 $\deg v(x)<\deg(f(x))$

只需证 $\deg u(x)<\deg(g(x))$

设 ∃ $u'(x)$, $v'(x)$

$\deg(u'(x))>\deg(\overset{g}{\cancel{f}}(x))$

且 $u'(x)f(x)+v'(x)g(x)=1$

∴ $u'(x)=h(x)g(x)+r(x)$

∴ $r(x)f(x)+g(x)[h(x)f(x)+v'(x)]=1$

∴ $\deg(r(x))<\deg(g(x))$

∴存在性得证

唯一性

$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$

$u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x)=1$

∴ $(u_1(x)-u_2(x))f(x)+(v_1(x)-v_2(x))\cdot g(x)=0$

又∵ $(f(x),g(x))=1$

∴ $g(x)\mid u_1(x)-u_2(x)$

∴ $\deg(g(x))\le\deg u_1(x)$

矛盾

∴唯一存在

5、

(1) $f(x)=x^3+3x^2+7x+12$

$g(x)=x^2+2x+4$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+2x+4\,\overline{)\,x^3+3x^2+7x+12} \\ x^3+2x^2+4x \\ \hline x^2+3x+12 \\ x^2+2x+4 \\ \hline x+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x+8\,\overline{)\,x^2+2x+4} \\ x^2+8x \\ \hline -6x+4 \\ -6x-48 \\ \hline 52 \end{array}$$

∴最大公因式为1

∴ $52=(x^2+2x+4)-(x+8)(x-6)$

$52=(x^2+2x+4)-(x-6)(x^3+3x^2+7x+12-(x+1)(x^2+2x+4))$

∴ $52=(6-x)f(x)+(x^2-5x-5)g(x)$

∴ $u(x)=-\frac{1}{52}(x-6)$

$v(x)=-\frac{1}{52}(x^2-5x-5)$

(2) 由(1)知

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

其中 $A^3+3A^2+7A+12E=0$

∴ $-\frac{1}{52}(A^2-5A-5E)=v(A)$

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3}$

令 $c=\sqrt[3]{3}$ ∴ $c^3=3$

即 $c^3-3=0$

∴ $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3}$

$=\frac{1}{c^2-2c+3}$

令 $f(x)=x^3-3$, $g(x)=x^2-2x+3$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-2x+3 \,\overline{)\, x^3-3} \\ \underline{x^3-2x^2+3x} \\ 2x^2-3x-3 \\ \underline{2x^2-4x+6} \\ x-9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+7 \\ x-9 \,\overline{)\, x^2-2x+3} \\ \underline{x^2-9x} \\ 7x+3 \\ \underline{7x-63} \\ 66 \end{array}$$

∴ $(f(x),g(x))=1$

∴ ∃ $u(x)$, $v(x)$ s.t.

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

代入 $x=c$ ∴ $f(c)=0$

∴ $v(c)g(c)=1$

∴ 上下同乘 $v(c)$

可得 $\frac{1\cdot v(c)}{f(c)\cdot v(c)}=v(c)$

∴ $v(c)=\frac{9\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+15}{66}$

7. $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$

$f'(x)=3x^2-6x+t$

∵ $f(x)$有重根

∴ $(f(x),f'(x))\neq 1$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\ 3x^2-6x+t \,\overline{)\, x^3-3x^2+tx-1} \\ \underline{x^3-2x^2+\frac{1}{3}tx} \\ -x^2+\frac{2}{3}tx-1 \\ \underline{-x^2+2x-\frac{t}{3}} \\ (\frac{2t}{3}-2)x+(\frac{t}{3}-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{9}{2t-6}x-\frac{45}{2(2t-6)} \\ (\frac{t}{3}-1)(2x+1) \,\overline{)\, 3x^2-6x+t} \\ \underline{3x^2-6x-\frac{15}{4}} \\ t+\frac{15}{4} \end{array}$$

又∵ $f(x)$与$f'(x)$不互素的充要条件是 $r_1(x)=0$ 或 $r_2(x)=0$

∴ $r_1(x)=0$ ∴ $t=3$

∴ 1为3重根

$r_2(x)=0$, $t=-\frac{15}{4}$ 时

∴ $-\frac{1}{2}$为2重根

8. ∵ $\forall a\in R$, $f(a)>0$

∴ $f(x)$无实根

∴ $\deg(f(x))=n$

又∵ 复根均成对出现

∴ n为偶数

设$f(x)$复根分别为

$(a_1\pm b_1 i),\dots,(a_s\pm b_s i)$

$n=2s$.

∴ $f(x)=c(x-a_1-b_1i)(x-a_1+b_1i)\cdots(x-a_s-b_si)(x-a_s+b_si)$

∴ 令 $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)\cdots(a_s+b_si)=m+ni$

∴ $(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)\cdots(a_s-b_si)=m-ni$

∴ $(m,n\in R)$

∴ $f(x)=c(x^s-m-ni)(x^s-m+ni)$

∴ $f(x)=c(x^{2s}-(m^2+n^2))$

∴ $|\varphi(x)|=\sqrt{c}(x-m-ni)$

9. (1)[illegible]

$f(x)=(x-a)f'(x)+c$

(2) 不正确

设 $f(x)=c\prod_{i=1}^{s}(x-x_i)^{n_i}$

$c\in R$, $x_1,\dots,x_s\in R$ 互不相同

∴ $f'(x)=c\sum_{i=1}^{s}\frac{(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_s)^{n_s}}{x-x_i}$

$=f(x)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{x-x_i}$

∴ 同理 $f''(x)=f'(x)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{x-x_i}+f(x)\sum_{i=1}^{s}\frac{-n_i}{(x-x_i)^2}$

∵ a为$f'(x)$重根

∴ $f'(a)=f''(a)=0$

若a不是$f(x)$的根

则 $a\neq x_i$, $\forall i$

∴ $0=f''(a)=f'(a)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{a-x_i}-f(a)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{(a-x_i)^2}$

∴ $f(a)=0$ 矛盾

∴ a是$f(x)$的根且为$f(x)$的重根

补：9(2)做法II

设 $f(x)=c\prod_{i=1}^{s}(x-x_i)^{n_i}$

$c\in R^*$, $x_1,\dots,x_s\in R$ 互不相同

$n_1+\dots+n_s=n$

不妨设 $x_1<x_2<\dots<x_s$

∵ $f(x_i)=f(x_{i+1})=0$

$(1\le i\le s-1)$

∴ Rolle定理 ⇒ $\exists\,\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$

s.t. $f'(\xi_i)=0$

∴ $f'(x)$至少有 $(n_1-1)+\dots+(n_s-1)+s-1$

$=n-1$ 个根

又∵ $\deg(f'(x))=n-1$

∴ 为$f'(x)$的所有根

而a为$f'(x)$的重根 ∴ $\exists\, i$, s.t. $a=x_i$, 即a为$f(x)$的重根

10. ∵ $f(x)$有解 -1

∴ $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$

$=(x+1)^3(x-2)$

$f'(x)=(x+1)^2(4x-5)$

重因式 $(x+1)$

$g(x)=(x+1)(x-2)$

11. $g(x)=x^6-2x^5-5x^2+11x-2$

∴ $g(x)=(x-2)(x^5-5x+1)$

12. 用反证法

$f(x)=g(x)\cdot h(x)$

又∵ $f(a_i)=-1$

$i=1,\dots,n$.

∴ $g(a_i)h(a_i)=-1$

∴ $g(a_i)+h(a_i)=0$

$(g(a_i),h(a_i)\in Z)$

∵ $\deg(g(x)),\deg(h(x))<n$

$a_1,\dots,a_n$互不相同

∴ $g(x)+h(x)=0$

∴ $f(x)=-g^2(x)$与f为首一多项式矛盾

∴ $f(x)$不可约.