数学外卖-多项式答案

王衡宇 梁海纳 谢明灿

2024/10/10

Problem 1. 设 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-2x+1$, 求 $f(1+\sqrt{2})$.

Answer 1. 答案为$1-\sqrt{2}$.
考虑多项式 $g(x)=x^2-2x-1$. 其两根为 $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$, 作带余除法:v

$$x^4-3x^3+2x^2-2x+1=(x^2-2x-1)(x^2-x+1)+(-x+2),$$

故 $f(1+\sqrt{2})=g(1+\sqrt{2})((1+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})+1)+(-(1+\sqrt{2})+2)=1-\sqrt{2}$.

Problem 2. $m,n\in\mathbf{N}^*$, 考虑多项式

$$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1$$
$$g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

求证 $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(m,n)=1$.

Answer 2. 注意到以下的因式分解 *(考虑单位根)*

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1=(x-\zeta_m)(x-\zeta_m^2)\cdots(x-\zeta_m^{m-1})\qquad \zeta_m=e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

从而 $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当不存在 $1\le k<m,1\le l<n$ 使得 $\zeta_m^k=\zeta_n^l$ 成立.
对 $\zeta_m^k=\zeta_n^l$ 进行化简, 我们可以得到

$$\zeta_m^k=\zeta_n^l\Leftrightarrow e^{\frac{2k\pi i}{m}}=e^{\frac{2l\pi i}{n}}\Leftrightarrow\frac{k}{m}=\frac{l}{n}\Leftrightarrow kn=ml.$$

设 $(m,n)=d,m=dm_1,n=dn_1,m_1,n_1\in\mathbf{N}^*$., 此时 $(m_1,n_1)=1$,. 等式化为 $kn_1=m_1l$. 由于 $m_1\mid n_1k$, 且 $(m_1,n_1)=1$, 我们有 $m_1\mid k$, 同理 $n_1\mid l$.
注意到若 $d\neq 1$, 则取 $k=m_1=\frac{m}{d}<m,l=n_1=\frac{n}{d}<n$ 成立等式且符合条件, 此时 $(f(x),g(x))\neq 1$.
反之若 $kn_1=m_1l$ 有解 $(k,l)=(k_0,l_0)$, 则 $m_1\le k_0<m$, 这表明 $d=\frac{m}{m_0}>1$. 命题得证.

Problem 3. 设 $f_0,f_1,f_2,f_3\in\mathbf{F}[x]$, 假设 $f_0(x^5)+xf_1(x^{10})+x^2f_2(x^{15})+x^3f_3(x^{20})$ 能被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除, 证明:$f_i(x)(i=0,1,2,3)$ 能被 $x-1$ 整除.

Answer 3. 考虑 5 次单位根 $\zeta_5=e^{\frac{2\pi i}{5}}$, 则有 $\zeta_5^5=1,\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2+\zeta_5+1=0$, 故有

$$(x-\zeta_5^i)\mid(f_0(x^5)+xf_1(x^{10})+x^2f_2(x^{15})+x^3f_3(x^{20}))\qquad i=1,2,3,4.$$

从而带入 $\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4$, 得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}f_0(1)+\zeta_5f_1(1)+\zeta_5^2f_2(1)+\zeta_5^3f_3(1)=0\\ f_0(1)+\zeta_5^2f_1(1)+\zeta_5^4f_2(1)+\zeta_5^6f_3(1)=0\\ f_0(1)+\zeta_5^3f_1(1)+\zeta_5^2f_6(1)+\zeta_5^9f_3(1)=0\\ f_0(1)+\zeta_5^4f_1(1)+\zeta_5^8f_2(1)+\zeta_5^{12}f_3(1)=0\end{cases}$$

其系数矩阵为 4 阶 *Vandermonde* 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta_5 & \zeta_5^2 & \zeta_5^3 \\ 1 & \zeta_5^2 & \zeta_5^4 & \zeta_5^6 \\ 1 & \zeta_5^3 & \zeta_5^6 & \zeta_5^9 \\ 1 & \zeta_5^4 & \zeta_5^8 & \zeta_5^{12} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(\zeta_5^i-\zeta_5^j)\neq 0$$

从而该方程组仅有零解, 这意味着 $f_0(1)=f_1(1)=f_2(1)=f_3(1)=0$, 也即 $f_i(x)(i=0,1,2,3)$ 能被 $x-1$ 整除.

Problem 4. 假设有互异的首一多项式 $f_1(x), f_2(x)$, 且 $\deg(f_1(x))\le 3, \deg(f_2(x))\le 3$, 又设 $x^4+x^2+1\mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$, 试求 $(f_1(x),f_2(x))$.

Answer 4. 考虑 6 阶单位根 $\zeta=\zeta_6=e^{\frac{2\pi i}{6}}$. 首先注意到 *(*考虑 $x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$*)*

$$x^4+x^2+1=(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^4)(x-\zeta^5).$$

从而有

$$x-\zeta^i \mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3) \qquad i=1,2,4,5.$$

分别得到两个齐次线性方程组

$$\begin{cases} f_1(1)+\zeta^2f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\zeta^4f_2(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(-1)+\zeta^2f_2(-1)=0 \\ f_1(-1)+\zeta^4f_2(-1)=0 \end{cases}$$

解得 $f_1(1)=f_2(1)=f_1(-1)=f_2(-1)=0$, 从而有

$$x-1\mid f_i(x) \qquad x+1\mid f_i(x) \qquad i=1,2.$$

于是 $x^2-1\mid (f_1(x),f_2(x))$, 再由 $f_1(x),f_2(x)$ 是互异的首一多项式知 $(f_1(x),f_2(x))=x^2-1$.

Problem 5. 设 $f(x),g(x),h(x)\in\mathbf{F}[x]$, 且 $(g(x),h(x))=1$, 证明*:* 存在 $r(x),s(x)\in\mathbf{F}[x]$ 使得

$$f(x)=g(x)r(x)+h(x)s(x) \qquad \deg r(x)<\deg h(x).$$

Answer 5. 用带余除法, 存在 $q_0(x),r_0(x)\in\mathbf{F}[x]$, 使得

$$f(x)=q_0(x)h(x)+r_0(x) \qquad \deg r_0(x)<\deg h(x). \tag{1}$$

由于 $(g(x),h(x))=1$, 由 ***Bezout*** 等式存在 $u(x),v(x)\in\mathbf{F}[x]$ 使得

$$u(x)g(x)+v(x)h(x)=r_0(x). \tag{2}$$

再对 $u(x)$ 作带余除法, 存在 $q(x),r(x)\in\mathbf{F}[x]$ 使得下式成立

$$u(x)=q(x)h(x)+r(x) \qquad \deg r(x)<\deg h(x). \tag{3}$$

把 (2) 式回代入 (1) 式, 联立式 (3) 即有

$$f(x)=g(x)r(x)+h(x)(q_0(x)+g(x)q(x)+v(x)).$$

令 $s(x)=q_0(x)+g(x)q(x)+v(x)$ 即知命题成立.

Problem 6. 设非零复数 c 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的某一非零多项式的根，令

$$M = \{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(c) = 0\}$$

(1) 证明:M 中存在唯一的首一不可约多项式 $p(x)$，使得对所有 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ 均有

$$f(x) \in M \Leftrightarrow p(x) \mid f(x).$$

(2) 证明: 存在多项式 $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 使得 $g(c) = \frac{1}{c}$.

Answer 6. (1) 注意到 M 中有正次数的多项式, 则由最小数原理, 在 M 中存在次数最低的正次数多项式. 而若 $f(x) \in M$, 则对任意 $r \in \mathbf{Q}$ 有 $rf(c) = 0$. 这表明 $rf(x) \in M$. 从而通过调整首项系数知存在次数最小的首一正次数多项式, 记作 $p(x)$.

若 $p(x)$ 可约, 设 $p(x) = g(x)h(x), \deg g(x) < \deg p(x), \deg h(x) < \deg p(x)$. 但由 $0 = p(c) = g(c)h(c)$ 知 $g(c) = 0, h(c) = 0$ 至少有一成立，不妨 $g(c) = 0$, 但这将导致 $g(c) = 0$, 进而 $g(c) \in M$, 矛盾于 $p(x)$ 的取法, 从而 $p(x)$ 不可约.

下证 $f(x) \in M \Leftrightarrow p(x) \mid f(x)$.

若 $f(x) \in M$, 做带余除法

$$f(x) = q(x)p(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg p(x)$$

由于 $r(c) = f(c) - q(c)p(c) = 0$, 则 $r(x) \in M$. 但由 $\deg r(x) < \deg p(x)$ 知只能有 $r(x) = 0$. 故 $f(x) = q(x)p(x)$, 这表明 $p(x) \mid f(x)$.

反之若 $p(x) \mid f(x)$ 则存在 $q[x] \in \mathbf{Q}[x]$ 使得 $f(x) = p(x)q(x)$ 成立. 则 $f(c) = p(c)q(c) = 0 \Rightarrow f(x) \in M$.

最后证明 $p(x)$ 唯一. 由上所证, 若同时有 $p(x), q(x)$ 满足条件, 则有 $p(x) \mid q(x), q(x) \mid p(x)$, 考虑次数和首项系数即有 $p(x) = q(x)$, 证毕.

(2) 利用 (1) 的结论, 由于 $c \neq 0$, 则 $f(c) = c \neq 0$, 这表明 $f(x) = x$ 不属于 M, 从而 $p(x) \nmid x$. 再由 $p(x)$ 不可约即得 $(p(x), x) = 1$. 由 ***Bezout*** 定理, 存在 $u(x), q(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 使得

$$u(x)p(x) + xq(x) = 1.$$

从而 $1 = u(c)p(c) + cg(c) = cg(c) \Rightarrow g(c) = \dfrac{1}{c}$.

Problem 7. 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{C}[x]$ 互素, 证明:$[f(x)]^2 + [g(x)]^2$ 的重根是 $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2$ 的根.

Answer 7. 设 t 是 $[f(x)]^2 + [g(x)]^2$ 的重根, 则有

$$\begin{cases} [f(t)]^2 + [g(t)]^2 = 0 \\ f(t)f'(t) + g(t)g'(t) = 0 \end{cases}$$

从而

$$[f(t)f'(t)]^2 = [g(t)g'(t)]^2.$$

由于 $f(x), g(x)$ 互素, 所以 $f(t) \neq 0, g(t) \neq 0$. 故回代入式 1 有

$$[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 = 0.$$

命题得证.

Problem 8. 试求 $2n-1$ 次多项式 $f(x)$, 使得 $(x-1)^n \mid (f(x)+1), (x+1)^n \mid (f(x)-1)$.

Answer 8. 由于 1 是 $f(x)+1$ 的 n 重根, 从而 1 是 $f'(x)$ 的 $n-1$ 重根. 同理 -1 也是 $f'(x)$ 的 $n-1$ 重根. 又由于 $\deg f'(x)=2n-2$. 从而可设 $f'(x)=a(x-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}=a(x^2-1)^{n-1}=a\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{2k}(-1)^{n-1-k}$. 故满足条件的 $f(x)$ 形如 $f(x)=a\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\binom{n-1}{k}x^{2k+1}(-1)^{n-1-k}$.$(a\neq 0)$.

Problem 9. 证明: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $(x^2+x+1,x^{n+2}-(x+1)^{2n+1})=1$.

Answer 9. 设 $d(x)=(x^2+x+1,x^{n+2}-(x+1)^{2n+1})$. 反证 $\deg d(x)>0$. 则 $d(x)\mid x^2+x+1$. 从而 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 或 $\overline{\zeta}=e^{\frac{4\pi i}{3}}$ 为其根. 然而令 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$. 则

$$f_n(\zeta)=\zeta^{n+2}-(\zeta+1)^{2n+1}=\zeta^{n+2}-(-\zeta^2)^{2n+1}=\zeta^{n+2}+\zeta^{4n+2}=\zeta^{n+2}(1+\zeta^{3n})=2\zeta^{n+2}\neq 0.$$

$$f_n(\overline{\zeta})=\overline{\zeta}^{n+2}-(\overline{\zeta}+1)^{2n+1}=\overline{\zeta}^{n+2}-(-\overline{\zeta}^2)^{2n+1}=\overline{\zeta}^{n+2}+\overline{\zeta}^{4n+2}=\overline{\zeta}^{n+2}(1+\overline{\zeta}^{3n})=2\overline{\zeta}^{n+2}\neq 0.$$

矛盾于 $d(x)\mid f_n(x)$., 从而原命题得证.

Problem 10. 设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$, 且 $f(1)=f(2)=f(3)=p$ (p为素数), 证明: 不存在 $m\in\mathbf{Z}$ 使得 $f(m)=2p$.

Answer 10. 设 $g(x)=f(x)-p$, 则 $1,2,3$ 是 $g(x)$ 的三根. 故设 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)h(x),m\in\mathbf{Z},h(x)\in\mathbf{Z}[x]$(因为 $x-1,x-2,x-3$ 本原).
现在设 $g(k)=p(k\in\mathbf{Z})$, 则有

$$(k-1)(k-2)(k-3)h(k)=p.$$

由于 p 为素数, 因而左侧四个因子中有一个为 p 或 $-p$, 其余为 ±1. 不妨设 $m-1=\pm p$, 则由 $m-2=\pm1$ 知 $m=3$ 或 $m=1$, 二者皆导出矛盾. 从而不存在整数 k 使得 $g(k)=p$, 即不存在整数 k 使得 $f(k)=2p$.

Problem 11. 设 $f(x),g(x),h(x)\in\mathbf{R}[x]$, 且 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$, 证明 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

Answer 11. 若 $g(x)\neq 0$, 则存在 $t<0$ 使得 $g(t)\neq 0$, 但 $0\leq f^2(t)=tg^2(t)+th^2(t)\leq tg^2(t)<0$, 矛盾! 因而 $g(x)=0$. 同理 $h(x)=0$, 回代有 $f(x)=0$, 命题得证.

Problem 12. 设 $n\in\mathbf{N}^*,\varphi(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, 且 $n\geq 5$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的整数. 证明: 若 $ax^2+bx+1\in\mathbf{Z}[x]$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 则 $f(x)=a\varphi^2(x)+b\varphi(x)+1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约.

Answer 12. 反证 $f(x)$ 可约, 设 $f(x)=g(x)h(x),g(x),h(x)\in\mathbf{Z}[x]$. 由于 $f(a_i)=a\varphi^2(a_i)+b\varphi(a_i)+1=1$. 从而或者 $g(a_i)=h(a_i)=1$, 或者 $g(a_i)=h(a_i)=-1$.
设有 $k(k\leq n,k\in\mathbf{N}^*)$ 个 a_i 使得 $g(a_i)=h(a_i)=1$(不妨设为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$) 成立. 我们有断言

若 $k\geq 4$, 则 $k=n$.

事实上若对 $i=1,2,3,4$ 有 $g(a_i)=1$, 则可设

$$g(x)=p(x)\prod_{i=1}^{4}(x-a_i)+1$$

此时若再有 $j\geq 5$ 使得 $g(a_j)=-1$, 则有 $g(a_j)=p(a_j)\prod_{i=1}^4(a_j-a_i)=-2$, 由于 a_j-a_i 互不相同, 则

$$2=\left|p(a_j)\prod_{i=1}^{4}(a_j-a_i)\right|\geq\left|\prod_{i=1}^{4}(a_j-a_i)\right|\geq|(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2|>4$$

这将导出矛盾.
因此以下两种情况必居其一.

$$g(a_i) = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad\qquad g(a_i) = -1 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

无论何者成立我们都可设

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \pm 1 = c\varphi(x) \pm 1$$

$$h(x) = d(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \pm 1 = d\varphi(x) \pm 1$$

但此时会产生分解 $a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + 1 = (c\varphi(x) \pm 1)(d\varphi(x) \pm 1)$, 矛盾于 $ax^2 + bx + 1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的不可分解性.

Problem 13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为复系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的三根, 试求以 $\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3$ 为三根的方程.

Answer 13. 计算

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c,$$

$$\alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_2^3\alpha_3^3 + \alpha_3^3\alpha_1^3 = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2 = b^3 - 3abc + 3c^2,$$

$$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3 = \sigma_3^3 = -c^3.$$

由韦达定理, 待求方程应为

$$y^3 + (a^3 - 3ab + 3c)y^2 + (b^3 - 3abc + 3c^2)y + c^3 = 0.$$

Problem 14. 设 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$,$\deg f(x) = n.f(x)$ 有 n 个复根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 证明: 对任意 $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 都有 $\prod\limits_{i=1}^{n} g(\lambda_i) \in \mathbf{Q}$.

Answer 14. 设 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Q}[x]$.
若 $g(x) = 0$, 命题显然成立.
若 $g(x) \neq 0$, 设 $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbf{Q}[x]$. 考虑

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} g(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} (b_m\lambda_i^m + \cdots + b_1\lambda_i + b_0)$$

易知 $F(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为 n 元对称多项式，从而存在其由 n 元基本对称多项式的表达的多项式, 即存在 $h \in \mathbf{Q}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$, 使得

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

成立, 再由 ***Vieta*** 定理知 $\sigma_i = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_m} \in \mathbf{Q}$. 从而

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \in \mathbf{Q}.$$

命题证毕.