数学外卖-多项式

王衡宇 梁海纳 谢明灿

2024/10/04

Problem 1. 设 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, 求 $f(1+\sqrt{2})$.

Problem 2. $m, n \in \mathbf{N}^*$, 考虑多项式

$$f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$$

$$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

求证 $(f(x), g(x)) = 1$ 当且仅当 $(m, n) = 1$.

Problem 3. 设 $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{F}[x]$, 假设 $f_0(x^5) + xf_1(x^{10}) + x^2 f_2(x^{15}) + x^3 f_3(x^{20})$ 能被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除, 证明:$f_i(x)(i = 0, 1, 2, 3)$ 能被 $x - 1$ 整除.

Problem 4. 假设有互异的首一多项式 $f_1(x), f_2(x)$, 且 $\deg(f_1(x)) \le 3, \deg(f_2(x)) \le 3$, 又设 $x^4 + x^2 + 1 \mid f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$, 试求 $(f_1(x), f_2(x))$.

Problem 5. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{F}[x]$, 且 $(g(x), h(x)) = 1$, 证明*: 存在* $r(x), s(x) \in \mathbf{F}[x]$ 使得

$$f(x) = g(x)r(x) + h(x)s(x) \qquad \deg r(x) < \deg h(x).$$

Problem 6. 设 $F[x]$ 表示数域 $\mathbf{F}$ 上的全体多项式集合，c 是 $\mathbf{F}[x]$ 中的某一非零多项式的根，令

$$I = \{f(x) \in \mathbf{F}[x] \mid f(c) = 0\}$$

(1) 证明*:* 存在唯一的首一多项式 $p(x) \in I$，使得 I 中所有 $f(x)$ 均有 $p(x) \mid f(x)$, 且 $p(x)$ 在 $f(x)$ 上不可约.

(2) 证明*:* 存在多项式 $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 使得 $g(c) = \frac{1}{c}$.

Problem 7. 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{C}[x]$ 互素, 证明:$[f(x)]^2 + [g(x)]^2$ 的重根是 $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2$ 的根.

Problem 8. 试求 $2n-1$ 次多项式 $f(x)$, 使得 $(x-1)^n \mid (f(x)+1), (x+1)^n \mid (f(x)-1)$.

Problem 9. 证明*:* 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $(x^2+x+1, x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}) = 1$.

Problem 10. 设 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, 且 $f(1) = f(2) = f(3) = p$ (p为素数), 证明*:* 不存在 $m \in \mathbf{Z}$ 使得 $f(m) = 2p$.

Problem 11. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{R}[x]$, 且 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$, 证明 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

Problem 12. 设 $n \in \mathbf{N}^*, \varphi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, 且 $n \ge 5$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相同的整数. 证明*:* 若 $ax^2 + bx + 1 \in \mathbf{Z}[x]$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 则 $f(x) = a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + 1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约.

Problem 13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为复系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的三根, 试求以 $\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3$ 为三根的方程.

Problem 14. 设 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$,$\deg f(x) = n$.$f(x)$ 有 n 个复根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 证明*:* 对任意 $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 都有 $\prod_{i=1}^{n} g(\lambda_i) \in \mathbf{Q}$.